上　智　大　学　試　験　問　題

試験日（Date of exam）	登録コード（Registration Code）
２０１２年７月２５日(水) １限／１２－５０２	SEA20100
科目名（Course Title）	**担当者**（Instructor）
機能創造理工学Ⅱ	後藤貴行

○担当者へのお願い/ Request for instructors ［下記の□内にレ点をつけてください/ Please check one of the boxes below ］
＊試験場への持込/ Materials allowed for exams → □一切持込不可/ Not allowed
☑持込可/ Allowed （詳細は下記へ/ Check on the items to be allowed below ）
□六法貸与/ Roppo prepared by law school

＊□テキスト/ textbook □ノート/ notebook □参考書/ reference book □辞書/ dictionary □レポート/ report
□電卓/ calculator □配布資料/ other materials □六法（判例・解説付きでなく書き込みが一切ないもの）/ Roppo
☑その他/ others ：A4 手書きメモ一枚(手書きに限る)
※持込資料補足/ Other comments, if any〔 〕

1. 質量m，固有振動数ωの一次元調和振動子のラグランジアンLを書き，一般化運動量を求めてから，ハミルトニアンHに変換し，正準方程式を導こう。

2. 二次元平面内を運動する粒子のラグランジアン$L=\frac{m\dot{x}^2}{2}+\frac{m\dot{y}^2}{2}-a\cdot(x^2+y^2)$ （aは定数）について，オイラー・ラグランジュ方程式から運動方程式を導こう。
次に，Lの変数を極座標（但し，$x=rcos\theta$，$y=rsin\theta$）に変換し，同様にオイラー・ラグランジュ方程式から運動方程式を導こう。

3. 三次元極座標のハミルトニアン$H=\frac{p_r^2}{2m}+\frac{p_\theta^2}{2mr^2}+\frac{p_\varphi^2}{2m\,r^2\sin^2\theta}+U(r)$ について，まず，循環座標を見つけ，保存量を求めよう。次に正準方程式を書き，その保存量が確かに一定であることを確かめよう。
さらに、$p_\theta^2+\frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}$ も一定であることを示そう。

4. バネ定数kのバネでつながった，一次元上を動く，質量mとMの二つの粒子（それぞれの座標をxとyとする）についてラグランジアンを求め、解こう。

※お疲れ様でした。なお，来年はこの講義はありませんので注意して下さい orz

上　智　大　学　試　験　問　題

解１． $L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}kx^2$より、一般化運動量は$p=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=m\dot{x}$

よって、$H=p\dot{x}-L=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}kx^2$

正準方程式は、$\begin{cases}\dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial x}=-kx\\ \dot{x}=\frac{\partial H}{\partial p}=\frac{p}{m}\end{cases}$

解２．デカルト座標による Euler-Lagrange 方程式は、$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=-2ax-m\ddot{x}=0\\ \frac{\partial L}{\partial y}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}=-2ay-m\ddot{y}=0\end{cases}$

これに極座標を代入するのでなく、ラグランジアンに戻って代入する。その方が一階微分しかないのではるかに簡単（何回もやったはず）。極座標の変換公式　$\dot{x}=\dot{r}\cos\theta-r\dot{\theta}\sin\theta$　などより、
$L=\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)-ar^2$　となるので、よって、

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial r}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}=-2ar+mr\dot{\theta}^2-m\ddot{r}=0\\ \frac{\partial L}{\partial \theta}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=0-\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right)=0\end{cases}$$

二つ目の式は、時間微分を実行せず、逆にそのままtで積分すれば、$mr^2\dot{\theta}=\mathrm{const.}$であることがわかる。

解３． $H=\frac{p_r^2}{2m}+\frac{p_\theta^2}{2mr^2}+\frac{p_\varphi^2}{2mr^2\sin^2\theta}=H\left(r,\theta,p_r,p_\theta,p_\varphi\right)$なので$\varphi$が循環座標。よって$p_\varphi$が保存量のはず。

実際、正準方程式より、$\dot{p}_\varphi=-\frac{\partial H}{\partial \varphi}=0$となる。ここまでは自明。

次に、$\frac{d}{dt}\left(p_\theta^2+\frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}\right)=2p_\theta\dot{p}_\theta+\frac{2p_\varphi\dot{p}_\varphi}{\sin^2\theta}-\frac{2p_\varphi^2\cos\theta\dot{\theta}}{\sin^3\theta}$　であるので、正準方程式から、

$\dot{p}_\theta=-\frac{\partial H}{\partial \theta}=\frac{p_\varphi^2\cos\theta}{m\sin^3\theta}$ 及び、$\dot{\theta}=\frac{\partial H}{\partial p_\theta}=\frac{p_\theta}{mr^2}$　を代入すると確かに、全角運動量$\equiv\frac{d}{dt}\left(p_\theta^2+\frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}\right)=0$となる。

※問題文のハミルトニアンのφの項に$\frac{1}{r^2}$が抜けていました。申し訳ありません。
幸い、ここまで到達した人は誰も居ませんでした（何か書いてある人には加点しました）。

解４．まず、$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}M\dot{y}^2+\frac{1}{2}k(x-y)^2$ である（重力やバネ長を考慮しても良いです）。

重心座標$X=\frac{mx+My}{m+M}$, 相対座標$Y=x-y$, 換算質量$\frac{1}{m_{\mathrm{R}}}=\frac{1}{m}+\frac{1}{M}$　などと定義すると、

$mx=(m+M)X-My=(m+M)X-M(x-Y)$であるので、

$\therefore x=\frac{(m+M)X+MY}{m+M}$　及び　$y=x-Y=\frac{(m+M)X-mY}{m+M}$を得る。これを$L$に代入すれば、

上 智 大 学 試 験 問 題

$L=\frac{1}{2}m\left(\dot{X}+\frac{M\dot{Y}}{m+M}\right)+\frac{1}{2}M\left(\dot{X}-\frac{M\dot{Y}}{m+M}\right)+\frac{1}{2}kY^2=\frac{1}{2}(m+M)\dot{X}^2+\frac{1}{2}m_{\mathrm{R}}\dot{Y}^2-\frac{1}{2}kY^2$

となって、座標Xについては質量$m+M$の質点の等速直線運動、座標Yについては、質量m_{R}の質点のバネ定数kの調和振動ということが直ちにわかる。念のため、オイラーラグランジュ方程式は、

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial X}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}}\right)=0-(m+M)\ddot{X}=0\\ \frac{\partial L}{\partial Y}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Y}}\right)=-kY-m_{\mathrm{R}}\ddot{Y}=0\end{cases}$$

【別解】$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}M\dot{y}^2+\frac{1}{2}k(x-y)^2$より運動方程式は（イ）$\begin{cases}-k(x-y)-m\ddot{x}=0\\ k(x-y)-M\ddot{y}=0\end{cases}$ となる。

両辺を加えれば、$m\ddot{x}=-M\ddot{y}$　を得る。

これを積分すれば、（ロ）$m\dot{x}=-M\dot{y}+mv_0$ 但し、v_0は積分定数。

さらに積分して、（ハ）$mx=-My+Mv_0t+Mx_0$ 但し、x_0は積分定数。

（ハ）を（イ）に代入して、$-k(x-y)-m\ddot{x}=-k\left(x+\frac{m}{M}x-v_0t-x_0\right)-m\ddot{x}=0$

整理して、$-k\left(\frac{x}{m}+\frac{x}{M}-\frac{v_0t}{m}-\frac{x_0}{m}\right)-\ddot{x}=0$　で、$\therefore \ddot{x}=-k\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)x+\frac{k}{m}(v_0t+x_0)$ となる。

右辺の第二項・第三項は、二回微分すれば消えるので、解は「振動＋等速運動」であり、

$x=\frac{A}{m}\sin(\omega t+\alpha)+\frac{m_{\mathrm{R}}}{m}(v_0t+x_0)$　但し、A,α は積分定数，$\omega=\sqrt{\frac{k}{m_{\mathrm{R}}}}$，　$\frac{1}{m_{\mathrm{R}}}=\frac{1}{m}+\frac{1}{M}$である。

（ハ）式に代入すれば $y=-\frac{m}{M}x+v_0t+x_0=-\frac{A}{M}\sin(\omega t+\alpha)-\left(\frac{m_{\mathrm{R}}}{M}-1\right)(v_0t+x_0)$

ここで、$\frac{m_{\mathrm{R}}}{M}-1=\frac{mM}{m+M}\frac{1}{M}-1=\frac{-M}{m+M}=-\frac{m_{\mathrm{R}}}{m}$ であるので、$y=-\frac{A}{M}\sin(\omega t+\alpha)+\frac{m_{\mathrm{R}}}{m}(v_0t+x_0)$

さて、どちらの方法が簡単でしょうか。

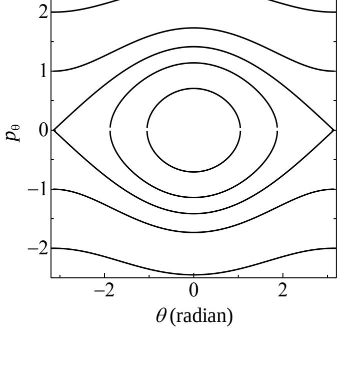
【おまけの問題】

長さlの軽い棒の先に付けられた質点mの質点による剛体振り子の運動を位相空間に表わせ。

$L=\frac{1}{2}m\left(l\dot{\theta}\right)^2-mgl(1-cos\theta)$ より、$p_\theta=\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=ml^2\dot{\theta}$　であるので、

$H=p_\theta\dot{\theta}-L=\frac{p_\theta^2}{2ml^2}+mgl(1-cos\theta)$　となる。$H=E$とすると、$p_\theta=\pm\sqrt{2ml^2\left(E-mgl(1-cos\theta)\right)}$

なので、θをx軸、p_θをy軸に描画すれば良い（逆でも良い）。



イ）$E\ll mgl$ の場合、$H=\frac{p_\theta^2}{2ml^2}+\frac{mgl}{2}\theta^2$なので、調和振動

ロ）$E\gg mgl$の場合、任意のθに対して$\frac{p_\theta^2}{2ml^2}\gg mgl(1-cos\theta)$なので、

　$E\approx\frac{p_\theta^2}{2ml^2}$（一定値なので水平線）

ハ）中間の場合、イとロを滑らかに繋げば良い。