数理物理演習 III　’98 年度期末試験　99 年 1 月 23 日(水曜) 7-8 時限

問 1　調和振動子

ハミルトニアン$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$で表わされる 1 次元調和振動子を考える。演算子 $a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\sqrt{m\omega}x + i\frac{p}{\sqrt{m\omega}}\right)$と$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\sqrt{m\omega}x - i\frac{p}{\sqrt{m\omega}}\right)$を定義し、$H$の固有状態をエネルギーの低いほうから順に、$|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \cdots$とし、それぞれの固有エネルギーを$E_0$，$E_1$，$E_2 \cdots$とする。

1)　Hをa及び$a^\dagger$を使って表せ。

2) $a|n\rangle$及び$a^\dagger|n\rangle$の固有エネルギーをE_nで表せ。

3) 時間に依存した摂動$V = V_0 x e^{-i\Omega t}$を加える(V_0, Ωは定数)。どの準位間の遷移が起こるか調べ、遷移が可能なΩの値を求めよ。

問 2 スピン角運動量

1)　大きさが 1/2 のスピン演算子$\vec{S}$について、S_zの固有状態を$\left|+\frac{1}{2}\right\rangle$と$\left|-\frac{1}{2}\right\rangle$とするとき、$S_x$と$S_y$の固有状態を求めよ。ヒント―例えば$S_x$の固有状態を$\varphi$とすれば、$a$を固有値として$S_x \varphi = a\varphi$が成り立つ。

2)　$H = J\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$のようにハイゼンベルク相互作用する二つのスピン(大きさは 1/2 とする)のハミルトニアンに対する固有状態と固有エネルギーを求めよ。

問 3 摂動

1) ハミルトニアン$H = -\alpha I_z$の固有エネルギーを図示し、エネルギー準位間隔を記せ。但し、αはゼロでない定数で、I_zは大きさ$I = 3/2$のスピン演算子のz成分とする。

2) 摂動として$V = \beta(I_z \cos\theta + I_x \sin\theta)^2$を加えたときの、$H$の固有状態に対するエネルギー準位間隔$I_z = \frac{3}{2} \sim \frac{1}{2}$及び$I_z = \frac{1}{2} \sim -\frac{1}{2}$のずれを一次の摂動で計算せよ。但し$\beta, \theta$は定数。ヒント―$V$のうち、$I_z$を不変に保つ項のみを取り出せばよい。$I_\pm |m\rangle = \sqrt{(I \mp m)(I \pm m + 1)}\,|m \pm 1\rangle$を使え。

＊コメントもどうぞ (2 行以内)