数理物理演習 III　　No.3　　31. May 2000

**—— 生成消滅演算子を使った 1 次元調和振動子の問題の解き方**

**◎ハミルトニアン** $H=\dfrac{p^2}{2m}+\dfrac{m\omega^2x^2}{2}=-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2}{dx^2}+\dfrac{1}{2}m\omega^2x^2$ **で記述される 1 次元調和振動子を考え、演算子** $a=\dfrac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\sqrt{m\omega}x+i\dfrac{p}{\sqrt{m\omega}}\right)$ **及び** $a^\dagger=\dfrac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\sqrt{m\omega}x-i\dfrac{p}{\sqrt{m\omega}}\right)$ **を定義しておく。この演算子をうまく操作することで微分方程式を全く解かずに解を求めてしまおう。**

**問 1**　$a$ **及び** $a^\dagger$ **の交換関係** $\left[a,a^\dagger\right]\equiv aa^\dagger-a^\dagger a$ **を求めよ。**

**問 2**　$H$ **を** $a$ **及び** $a^\dagger$ **を使って表せ。**

**問 3**　**基底状態(最もエネルギーの低い状態)** $|0\rangle$ **は、** $a|0\rangle=0$ **を満たすことを証明せよ。**

**◎** $n$ **番目の励起状態** $|n\rangle$ **を以下の手順で求める。**

**問 4**　**ハミルトニアンと** $a$ **及び** $a^\dagger$ **の交換関係** $[a,H]$ **及び** $\left[a^\dagger,H\right]$ **を求めよ。**

**問 5**　$a|n\rangle$ **及び** $a^\dagger|n\rangle$ **の固有エネルギーを** $E_n$ **を使って表せ (ヒント** $[a,H]$ **を** $|n\rangle$ **に作用させてみよ)。**

**問 6**　**規格化条件(** $\langle n|n\rangle=1$ **)を考慮することにより、** $|n\rangle$ **を** $|0\rangle$ **を使って表せ。**

**問 7**　$a|0\rangle=0$ **を考慮することにより、基底状態のエネルギーと波動関数を求めよ。**

**◎おまけ**

**問 8**　$\left\{|n\rangle\right\}_{n=0,1,\cdots}$ **を基底ベクトルとして** $H$ **や** $a$ **、** $a^\dagger$ **を行列(無限次元)で書くとどうなるか。** $|n\rangle$ **は確かに** $H$ **の固有ベクトルになっているか。また、** $x$ **や** $p$ **はどうか。**

**後藤** (3-337, gotoo-t@ sophia.ac.jp)