数理物理および演習 III　　　　　レポート問題　1　　　　　　　　31. May 2000

既に求めた調和振動子の $n = 0, 1$ などの波動関数 $u_n(x)$ について以下の計算を行い議論せよ。

微分方程式の解をそのまま用いても良いし、あるいは、演算子を使って解いても良い。

1)　$\langle u_n|x^2|u_n\rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot u_n(x)x^2u_n(x)$ と、$\langle u_n|p^2|u_n\rangle$ を計算し、

調和振動子のポテンシャルエネルギーと運動エネルギーを比較せよ。

2)　まず、$\langle x\rangle \equiv \langle u_n|x|u_n\rangle$ と $\langle p\rangle \equiv \langle u_n|p|u_n\rangle$ を求め、前問(1)の結果と合わせて、

$\langle \delta x\rangle \equiv \sqrt{\langle u_n|(x-\langle x\rangle)^2|u_n\rangle}$ 及び、$\langle \delta p\rangle \equiv \sqrt{\langle u_n|(p-\langle p\rangle)^2|u_n\rangle}$

を計算し、不確定性原理を確かめよ。

3)　$u_n(x)$ に x や p を作用させると、どのように変化するか。それは何を意味しているか。

4)　調和振動子と箱型ポテンシャルの波動関数の形を比べてみよ。ちなみに両者のハミルトニアンは、どちらも $H = p^2 + x^n$ の形($n = 2, \infty$)であり似ていることに注意せよ。

5)　議論 2)を「箱型ポテンシャル」に対する波動関数について行ってみよ。

6)　$n \to \infty$ のときの解(本当に∞でなくとも適当に大きな n でも良い)と古典論での解をグラフを描いて比較せよ(問題 No.2、問 5)。

---

7)　以下、演算子による解き方の別解 — まず、$[a^m, a^\dagger] = ma^{m-1}$ を示せ。

8)　前問の結果を使って $\langle 0|a^m a^{\dagger n}|0\rangle = m\langle 0|a^{m-1}a^{\dagger n-1}|0\rangle$ を示せ。

9)　前問の結果を繰り返し使って $\langle 0|a^m a^{\dagger n}|0\rangle$ を求め、$|n\rangle$ を $|0\rangle$ と $a^\dagger$ を使って表わせ。

4/28　後藤 (3-335B, gotoo-t@hoffman.cc.sophia.ac.jp)