数理物理演習 III　　No.5　　28. June　2000

質量 m **の粒子に中心力** $V(r)$ **が働くシュレディンガー方程式を極座標で書くと、** $\vec{l}$ **を角運動量演算子として** $\hbar^2 \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r}\right) + 2mr^2(E-V)\Psi - l^2\Psi = 0$ **となる。この解を変数分離して** $\Psi = R(r)\Phi(\varphi)\Theta(\theta)$ **とすると、** ν, λ **を定数として** $\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right) + \left(\lambda - \frac{\nu}{\sin^2\theta}\right)\Theta = 0$ **及び** $\Phi'' + \nu\Phi = 0$ **が成り立つことがわかる。この角度依存部分** $\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ **が前回の** $F_j^m(\theta,\varphi)$ **に一致することを示そう。**

0) **規格化された波動関数** $\Phi(\varphi)$ **は** $\Phi(\varphi) = e^{im\varphi}/\sqrt{2\pi}$ （m **は整数で** $\nu = m^2$）**となることを示せ。ヒント―規格化条件は** $1 = \int_0^{2\pi} |\Phi(\varphi)|^2 d\varphi$ **である。**

1) $\Theta(\theta)$ **の満たす微分方程式で、変数変換** $z = \cos\theta$ $(|z| \le 1)$ **を行い、** $P(z) = \Theta(\theta)$ **に関する微分方程式** $\frac{d}{dz}\left((1-z^2)\frac{dP}{dz}\right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-z^2}\right)P = 0$ **を導け。**

2) **上式でまず、** $m = 0$ **の場合の解(ルジャンドルの多項式)を求める。** $P(z) = \sum_{n=0} c_n z^n$ **とした時、解が** $|z| \le 1$ **で有限となる為には正の整数** l **に対して** $\lambda = l(l+1)$ **でなければならないことを示せ。ヒント―** z^n **の係数を比較して** c_n **に関する漸化式を導き、** n **が大きな場合にどうなるか調べればよい。**

3) **ルジャンドルの母関数** $(1-2rz+r^2)^{-1/2}$ **を** r **についてテイラー展開** $= \sum_{l=0} P_l(z) r^l$ **すると、係数** $P_l(z)$ **が** $m = 0$ **の場合の前問** 1)**の微分方程式を満たすことを示せ。ヒント―両辺の対数を取り、各々** r **または** z **で微分することにより、** P_l **の漸化式を** 2 **つ作る。**

4) **ロドリグの公式** $P_l(z) = C_l \frac{d^l}{dz^l}(z^2-1)^l$ **によって得られる** P_l **が** $m = 0$ **の場合の前問** 1)**の微分方程式を満たすことを示せ。また、**3)**の母関数によって得られた** P_l **と一致させるように規格化定数** C_l **を求めよ。ヒント―** $w \equiv (z^2-1)^l$ **とおくと** $(z^2-1)w'' - 2(l-1)zw' - 2lw = 0$ **となることを示し、さらにこの式を** l **回微分せよ。規格化は** $z=1$ **での値に着目すればよい。**

5) **ルジャンドルの陪関数**(associated Legendre function)**を** $P_l^m = (1-z^2)^{m/2}\frac{d^m P_l}{dz^m}$ **と定義する。これが**(1)**の微分方程式を満たすことを示せ。また、この関数は** $m \le l$ **以外ではゼロになることを示せ。ヒント―** $m = 0$ **の場合の** 1)**式を** m **回微分すればよい。**

6) $\Phi(\varphi) = e^{im\varphi}/\sqrt{2\pi}$ **及び** $\Theta(\theta) = \sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)$ **のように規格化した解** $\Theta\Phi = Y_{l,m}$ **は球面調和関数と呼ばれる。** $Y_{l,m}$ **の規格・直交性** $\int d\Omega Y_{l,m} Y_{k,n} = \delta_{lk}\delta_{mn}$ **を示せ。ヒント―** $\int_{-1}^{+1} P_l^m(z) P_k^m(z) dz$ **を** $l \ne k$ **、** $l = k$ **の場合に分けて計算してみる。**

後藤 (3-335B, gotoo-t@sophia.ac.jp)