数理物理演習 III　　　No.6　**二つの角運動量の合成**　　　　14. July 2000

古典力学では二つのコマはそれぞれの角運動量及び二つの和について全ての成分を確定できた。しかし、量子力学では、二つの角運動量の和(合成角運動量)を決めてしまうと、各々の角運動量の成分がわからなくなる。このことを調べてみよう。

1) **交換する二つの角運動量** $\vec{j}_1, \vec{j}_2$ **の和を** $\vec{J} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2$ **とする。演算子** J^2 **と** J_z **が互いに交換することを示せ。また、**J^2 **と** J_z**、** j_1^2**、** j_2^2**、** j_{1z}**、** j_{2z} **のうち、交換しないものはどれか。**

2) **前問の結果より、**j_2^2, j_1^2, J^2, J_z **に対して同時に固有状態となっている状態** $|j_1 j_2 JM\rangle$ **を作ることができることがわかる(固有値はそれぞれ** $j_1(j_1+1)$, $j_2(j_2+1)$, $J(J+1)$, M **)。**
この状態 $|j_1 j_2 JM\rangle$ **は、** j_{1z} **と** j_{2z} **に対しては固有状態となっているかどうか調べよ。**

3) **状態** $|j_1 j_2 JM\rangle$ **は元々の角運動量** $\vec{j}_1, \vec{j}_2$ **に対する様様な固有状態の直積** $|j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle$ **の和として表されるが、各項の寄与を求めよう。**

$$|j_1 j_2 JM\rangle = \sum_{m_1, m_2} (j_1 j_2 m_1 m_2 | JM) |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle$$

$$\equiv (j_1 j_2 00|JM)|j_1 0\rangle|j_1 0\rangle + (j_1 j_2 0,1|JM)|j_1 0\rangle|j_1 1\rangle + (j_1 j_2 1,0|JM)|j_1 1\rangle|j_1 0\rangle + (j_1 j_2 1,1|JM)|j_1 1\rangle|j_1 1\rangle \cdots$$

と書いて「クレプシュゴルダン係数」$\equiv (j_1 j_2 m_1 m_2 | JM)$ **を求める。まず、両辺に** $J_z = j_{1z} + j_{2z}$ **を作用させ、** M **と** m_1, m_2 **の間の関係を求めよ。**

4) M **は** $m_1 = j_1$**、** $m_2 = j_2$ **のとき最大値**$= j_1 + j_2$ **を取る。** M **の取り得る範囲は**$-J \sim J$ **であるから、この最大の** M **に対して、** J **の値は同じく**$= j_1 + j_2$ **となる。よって、**

$|j_1, j_2, J = j_1 + j_2, M = j_1 + j_2\rangle$ 　**に対しては、単一の項**　$|j_1 j_1\rangle |j_2 j_2\rangle$ 　**のみが対応し、**

$$|j_1, j_2, j_1 + j_2, j_1 + j_2\rangle = |j_1 j_1\rangle |j_2 j_2\rangle$$

である。これから直ちに $(j_1 j_2 j_1 j_2 | j_1 + j_2, j_1 + j_2) = +1$ 　**が得られる(符号は正に取る)。**

この結果に対して $J_- = j_{1-} + j_{2-}$ **を作用させることにより、** $(j_1, j_2, j_1 - 1, j_2 | j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1)$

および　$\left(j_1, j_2, j_1, j_2 - 1 \middle| j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1\right)$　を求めよ。

5) 前問の結果に対し、更に $J_- = j_{1-} + j_{2-}$ を作用し続けて行くことで、

$\left(j_1, j_2, m_1, m_2 \middle| j_1 + j_2, M\right)$ を求めよ。但し、$M = m_1 + m_2$、$M = -J \sim J$ である。

6) ここまでで、$M = J = j_1 + j_2$ の状態 $\left|j_1, j_2, j_1 + j_2, j_1 + j_2\right\rangle = \left|j_1 j_1\right\rangle \left|j_2 j_2\right\rangle$ に $J_- = j_{1-} + j_{2-}$ を作用させて行くと、$M = -J \sim J$ までの $2(j_1 + j_2) + 1$ 個の状態が作られることがわかった。しかし、もともと、$\left|j_1 m_1\right\rangle$ と $\left|j_2 m_2\right\rangle$ は、各々 $2j_1 + 1$，$2j_2 + 1$ 個の状態を取り得るため、

$\left|j_1 m_1\right\rangle \left|j_2 m_2\right\rangle$ の独立な状態の数は、$(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ 個存在するはずである。

$J = j_1 + j_2$ 以外の状態を探そう。$J = j_1 + j_2$，$M = j_1 + j_2 - 1$ の状態は、$\left|j_1, j_1\right\rangle \left|j_2, j_2 - 1\right\rangle$ と

$\left|j_1, j_1 - 1\right\rangle \left|j_2, j_2\right\rangle$ の線形結合であったが(問 2-3)、同じ組み合わせで係数を変えて、その状態と直交する新しい状態を作れ。また、その新しい状態に対する J の値はいくらか?

7) 前問で作成した状態に $J_- = j_{1-} + j_{2-}$ を作用させ、異なる M の状態を生成してみよ(問 5,6 と同様)。この方法を繰り返して全ての J に対する状態を生成する手順を述べよ。

8) 前問で得られた全ての J に対する状態の数が、独立な $\left|j_1 m_1\right\rangle \left|j_2 m_2\right\rangle$ の状態の数である $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ 個に一致していることを示せ。

9) $j_1 = \frac{1}{2}$，$j_2 = \frac{1}{2}$ の場合のクレプシュゴルダン係数(16 個)を実際に求めてみよ
(ヒント――多くはゼロである)。

後藤 (e-mail: gotoo-t，内線 3356 又は 3348)