数理物理演習 III　　　No.7　**球面調和関数の加法定理**　　　4. Oct 2000

方向(q_n, φ_n) **と方向**(q_e, φ_e) **のベクトルのなす角を**q **とすると、下の公式「球面調和関数の加法定理」が成立することを以下の手順で求めよ(この定理は散乱問題や電荷分布の多重極展開などで使われる)**。$P_l(\cos q)$ **はルジャンドル関数、**$Y_l^{\pm m}(q_n, \varphi_n)$ **等は球面調和関数。**

$$P_l(\cos q) = \frac{4p}{2l+1}\sum_{m=-l}^{+l}(-1)^m Y_l^m(q_n, \varphi_n) Y_l^{-m}(q_e, \varphi_e)$$

○証明方針概要の**ヒント―** $P_l(\cos q)$を、角運動量$\vec{l}_e$, $\vec{l}_n$ を持つ二つの波動関数が合成された状態$P_l(\cos q) \equiv \Psi(q_n, q_n, q_e, q_e)$とみなして、その合成角運動量$\vec{L} = \vec{l}_e + \vec{l}_n$ の大きさを調べると、$L^2 = 0$，$L_z = 0$ となっていることがわかる。よって、$P_l(\cos q)$を角運動量の合成則を用いて書き表せば、加法定理となる。

(1) **次の関係式を示せ(ヒント：**方向(q_n, φ_n)及び(q_e, φ_e)を向いた単位ベクトルの内積である)

$$\cos q = \sin q_n \sin q_e \cos\varphi_n \cos\varphi_e + \sin q_n \sin q_e \sin\varphi_n \sin\varphi_e + \cos q_n \cos q_e$$

(2) (q_n, φ_n) **に対する角運動量演算子**$\hat{l}_n$ **を、**q_n **及び**φ_n **を使って表せ。**なお、**同様に**(q_e, φ_e)**に対する角運動量演算子**$\hat{l}_e$ **も全く同じ形になる。(ヒント：**$\vec{l} \equiv \vec{r} \times \vec{p}$ を極座標表示するだけ)。

(3) **関係式** $\hat{l}_n^2 P_l(\cos q) = \hat{l}_e^2 P_l(\cos q) = l(l+1)P_l(\cos q)$ **を示せ。**

(**ヒント：**問 1 の結果に$\vec{l}_e, \vec{l}_n$ を丁寧に作用させたものをルジャンドル微分方程式と比較せよ)。

(4) $\hat{L}_z = \hat{l}_{nz} + \hat{l}_{ez}$ **に対し、**$\hat{L}_z P_l(\cos q) = 0$ **を示し、**$\hat{L}_x P_l(\cos q) = 0$ **及び**$\hat{L}_y P_l(\cos q) = 0$ **も成立していることを説明せよ。(ヒント：**$\hat{L}_z = \hat{l}_{nz} + \hat{l}_{ez} = \frac{\partial}{\partial\varphi_n} + \frac{\partial}{\partial\varphi_e}$ などを丁寧に作用させるだけ。L_x , L_y の計算は多少煩雑)。

(5) **以上から、**$P_l(\cos q)$ **は大きさが**l **の角運動量を持った二つの波動関数**$Y_l^m(q_n, \varphi_n)$**、及び**

$Y_l^m(\theta_e,\varphi_e)$を合成して出来る状態(但し $L=0$，$M\equiv L_z=0$の角運動量を持つ)であることを説明せよ。(ヒント：合成前の角運動量は$\vec{l}_e,\vec{l}_n$で、合成後は$\vec{L}$である。$\vec{L}$は前問で調べてある)。

(6) 以上より、P_lを二つの角運動量$Y_l^m(\theta_n,\varphi_n)$，$Y_l^m(\theta_e,\varphi_e)$の合成されたものと考えれば、$c$を比例定数として角運動量合成則

$$P_l(\cos\theta)=c\sum_{m=-l}^{+l}(l,l,m,-m\,|\,0,0)\,Y_l^m(\theta_n,\varphi_n)\,Y_l^{-m}(\theta_e,\varphi_e)$$

が成り立つことがわかる。ここで、$(\theta_e,\varphi_e)=(0,0)$としてみると、上式の和において、$m=0$の項だけが寄与することになることを示せ。(ヒント：$(\theta_e,\varphi_e)=(0,0)$のとき、$\cos\theta=\cos\theta_n$であり、$\varphi_n$に依存しない。よって$Y_l^m(\theta_n,\varphi_n)$の$\varphi_n$依存性を考えればよい)。

(7)　そこで、$Y_l^0(\theta,\varphi)=\sqrt{\dfrac{2l+1}{4\pi}}P_l(\cos\theta)$，$Y_l^0(0,0)=\sqrt{\dfrac{2l+1}{4\pi}}$，$(l,l,m,-m\,|\,0,0)=\dfrac{(-1)^{l-m}}{\sqrt{2l+1}}$

を使い、比例定数cを求めよ。そして、その結果が最初に与えられた「加法定理」になっていることを確かめよ。(ヒント：代入するだけ)。

(8) やさしい応用例として、電荷密度 $\rho_e(\vec{r}_e)$の電子雲の中にある、電荷密度 $\rho_n(\vec{r}_n)$の原子核の静電エネルギー$E=\displaystyle\int d\vec{r}_e\int d\vec{r}_n\,\frac{\rho_e(\vec{r}_e)\,\rho_n(\vec{r}_n)}{|\,\vec{r}_e-\vec{r}_n\,|}$を、球面調和関数の積で展開せよ。

そして、$l=0,1,2$の各項の意味を考えよ。

(ヒント：まず、ルジャンドル多項式(No.5)の母関数展開　$1\Big/\sqrt{1-2z\cos\theta+z^2}=\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}P_l(\cos\theta)z^l$

を使って分母を展開し、その結果に加法定理を適用し、$E=\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\iint d\vec{r}_e d\vec{r}_n\cdots\cdots$の形に整理する。$l=0,1,2$の各項は電荷、双極子、四重極子の静電エネルギーとなっている。)

後藤 gotoo-t@hoffman.cc.sophia.ac.jp (内線 3356　又は 3348)