上 智 大 学 試 験 問 題

試験日（Date of exam）	登録コード（Registration Code）
２０１４年７月１７日(木) １限／３－４２１	SCT66700
科目名（Course Title）	担当者（Instructor）
解析力学	後藤貴行

〇担当者へのお願い/ Request for instructors ［下記の☐内にレ点をつけてください/ Please check one of the boxes below ］
＊試験場への持込/ Materials allowed for exams → ☐一切持込不可/ Not allowed
☑持込可/ Allowed （詳細は下記へ/ Check on the items to be allowed below ）
☐六法貸与/ Roppo prepared by law school

＊☐テキスト/ textbook ☑ノート/ notebook ☐参考書/ reference book ☐辞書/ dictionary ☐レポート/ report
☐電卓/ calculator ☐配布資料/ other materials ☐六法（判例・解説付きでなく書き込みが一切ないもの）/ Roppo
☐その他/ others ：
※持込資料補足/ Other comments, if any〔 〕

1. 空間反転対称性について説明せよ。（その他の対称性、例えば、時間の一様性や、空間の一様性・等方性についての説明は不要。）

2. 二次元平面内で運動する、質量m, Mの二つの粒子の座標を$\vec{x}_1 = (x_1, y_1)$, $\vec{x}_2 = (x_2, y_2)$とし，粒子間に働く力のポテンシャルは、Gを正の定数として$U(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{-GmM}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}$ と与えられるとした場合にラグランジアンと Euler-Lagrange 方程式を書け。

3. 前問2．のラグランジアンを、相対座標$\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$、及び、重心座標$\vec{X}$に座標変換せよ。次に、それらの共役運動量$\vec{p}, \vec{P}$を求め、さらにハミルトニアンに変換し、正準方程式を求めよ。
ヒント： 重心座標は、$\vec{X} = \frac{m\vec{x}_1 + M\vec{x}_2}{m+M}$ で与えられる。

4. 母関数 $W(q, Q) = \frac{qQ}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{2\sin\theta}(q^2 + Q^2)$ で与えられる正準変換を求めよ。
ヒント:新旧の変数の対応に注意し、$\begin{cases} Q = \cdots \\ P = \cdots \end{cases}$ の形で表わせ。
次に、位相空間における旧座標(p, q)の軌跡が楕円であるとき、新座標(P, Q)の軌跡はどのようになるか述べよ。

5. 水素原子における電子の運動を古典的に考える。電子（質量m、電荷e）が原子核の周りを半径rで円運動すると仮定し、極座標(r, θ)でラグランジアンを書き、θの共役運動量p_θ及び、作用変数 $J = \oint p_\theta \, d\theta$ を求め、r, m, e で表せ。但し真空の誘電率をε_0とする。
次に、$J = nh$ と量子化すると仮定した場合、円周の長さ$2\pi r$が、物質波のドブロイ波長（$\lambda = h \,/\, mv$）の整数倍（定在波）になることを示せ。

※研究室配属され、かつ、進路内定済の四年生は一つの問題を卒研内容の説明に替えて可。

上　智　大　学　試　験　問　題

〔略解〕

1．空間反転対称性について説明せよ。（その他の対称性、例えば、時間の一様性や、空間の一様性・等方性についての説明は不要。）

例）空間反転$\vec{x} \to -\vec{x}$で速度や運動量は反転するが、角運動量は不変。ネジや、渦巻きなどは、右巻き・左巻きが空間反転で入れ替わる。生物界では反転不変ではない（右巻きしか存在できないなど）ものが多い。古典力学の範囲では空間反転した世界も同等であるが、素粒子の世界ではパイ中間子の崩壊で生ずるミュー粒子など、片方しか安定に存在しないものが多い。現在では電荷と時間の向きも反転させると、同等になると言われている。

2．二次元平面内で運動する、質量m, Mの二つの粒子の座標を$\vec{x}_1 = (x_1, y_1)$，$\vec{x}_2 = (x_2, y_2)$とし，粒子間に働く力のポテンシャルは、Gを正の定数として$U(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{-GmM}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}$ と与えられるとした場合にラグランジアンと Euler-Lagrange 方程式を書け。

$L = \frac{m}{2}\left|\dot{\vec{x}}_1\right|^2 + \frac{M}{2}\left|\dot{\vec{x}}_1\right|^2 + \frac{GmM}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}$ より、

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = -\frac{GmM(x_1 - x_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} - m\ddot{x}_1 = 0 \ ,\ \frac{\partial L}{\partial x_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = +\frac{GmM(x_1 - x_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} - m\ddot{x}_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} = -\frac{GmM(y_1 - y_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} - m\ddot{y}_1 = 0 \ ,\ \frac{\partial L}{\partial y_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} = +\frac{GmM(y_1 - y_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} - m\ddot{y}_2 = 0$$

3．前問2．のラグランジアンを相対座標$\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$及び重心座標$\vec{X}$に、座標変換せよ。次に、それらの共役運動量$\vec{p}, \vec{P}$を求め、さらにハミルトニアンに変換し、正準方程式を求めよ。

ヒント：重心座標は、$\vec{X} = \frac{m\vec{x}_1 + M\vec{x}_2}{m+M}$ で与えられる。ここで換算質量$\mu = \frac{mM}{m+M}$ とおくと、

$L = \frac{m}{2}\left|\dot{\vec{X}} + \frac{M}{m+M}\dot{\vec{x}}\right|^2 + \frac{M}{2}\left|\dot{\vec{X}} - \frac{m}{m+M}\dot{\vec{x}}\right|^2 + \frac{GmM}{|\vec{x}|} = \frac{m+M}{2}\left|\dot{\vec{X}}\right|^2 + \frac{1}{2}\mu\left|\dot{\vec{x}}\right|^2 + \frac{GmM}{|\vec{x}|}$ 及び

$P_X = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = (m+M)\dot{X},\ P_Y = (m+M)\dot{Y},\ p_x = \mu\dot{x},\ p_y = \mu\dot{y}$ となるので、ハミルトニアンは、

$$H = P_{\mathrm{X}}\dot{X} + P_{\mathrm{Y}}\dot{Y} + p_{\mathrm{x}}\dot{x} + p_{\mathrm{y}}\dot{y} - L = \frac{1}{2(m+M)}(P_X^2 + P_Y^2) + \frac{1}{2\mu}\left(p_x^2 + p_y^2\right) - \frac{GmM}{|\vec{x}|}$$

となり、正準方程式は、

$$\dot{P}_X = -\frac{\partial H}{\partial X} = 0, \dot{X} = \frac{\partial H}{\partial P_X} = \frac{P_X}{m+M}\ , \dot{P}_Y = -\frac{\partial H}{\partial Y} = 0, \dot{Y} = \frac{\partial H}{\partial P_Y} = \frac{P_Y}{m+M}$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{GmMx}{|\vec{x}|^3}, \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{\mu}\ , \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{GmMy}{|\vec{x}|^3}, \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y}{\mu}$$

4．母関数 $W(q, Q) = \frac{qQ}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{2\sin\theta}(q^2 + Q^2)$ で与えられる正準変換を求めよ。

ヒント：新旧の変数の対応に注意し、$\begin{cases} Q = \cdots \\ P = \cdots \end{cases}$ の形で表わせ。

次に、位相空間における旧座標(p, q)の軌跡が楕円であるとき、新座標(P, Q)の軌跡はどのようになるか述べよ。

上 智 大 学 試 験 問 題

母関数による正準変換の定義に従って、

① $p = \frac{\partial W}{\partial q} = \frac{Q}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta} q$ 及び ②$P = -\frac{\partial W}{\partial Q} = \frac{q}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta} Q$ をえる。これを新変数＝、、の形に変形するために、

①$\cdot \cos\theta +$② $= \cos\theta \cdot p + P = -\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} q + \frac{q}{\sin\theta} = \sin\theta\, q$ より、$P = -\cos\theta\, p + \sin\theta\, q$

これを②に再び代入して、$-\cos\theta\, p + \sin\theta\, q = \frac{q}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta} Q$

$\therefore \frac{\cos\theta}{\sin\theta} Q = \cos\theta\, p - \sin\theta\, q + \frac{q}{\sin\theta}$ より、$Q = \sin\theta\, p - \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} q + \frac{q}{\cos\theta} = \sin\theta\, p + \cos\theta\, q$

この変換を行列で表わすと、回転行列なので軌跡は「斜め楕円」となる。

5. 水素原子における電子の運動を古典的に考える。電子（質量m、電荷e）が原子核の周りを半径rで円運動すると仮定し、極座標(r, θ)でラグランジアンを書き、θの共役運動量p_θ及び、作用変数 $J = \oint p_\theta\, d\theta$ を求め、r, m, e で表せ。但し真空の誘電率をε_0とする。
次に、$J = nh$ と量子化すると仮定した場合、円周の長さ$2\pi r$が、物質波のドブロイ波長（$\lambda = h / mv$）の整数倍（定在波）になることを示せ。

円運動と仮定しているので、$L = \frac{1}{2} m \left(r\dot{\theta} \right)^2 + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}$ でよく、$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta}$ となる。円運動$\dot{\theta}$ =一定であるから、作用変数は、$J = \oint mr^2 \dot{\theta}\, d\theta = 2\pi mr^2 \dot{\theta}$ となる。
ここで、遠心力$mr\omega^2 = mr\dot{\theta}^2$と、クーロン力$-\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} \right)$ が釣り合っているので、
$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{1}{mr} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$が得られ、 $J = 2\pi mr^2 \dot{\theta} = \sqrt{\frac{\pi m e^2 r}{\varepsilon_0}}$ を得る。（πやε_0を使って良いか質問する学生さんが何人居るか楽しみ！）
この J が量子化されているとすると、$\sqrt{\frac{\pi m e^2 r}{\varepsilon_0}} = nh$ となり、
円周長は、$2\pi r = \frac{2\varepsilon_0}{me^2} (nh)^2$、一方、ドブロイ波長λは、定義式$p = \hbar k = \frac{\hbar \cdot 2\pi}{\lambda}$ より、

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mr\dot{\theta}} = \frac{h}{mr\sqrt{\frac{1}{mr} \cdot \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}} = \frac{h}{\sqrt{\frac{me^2}{4\pi\varepsilon_0 r}}} = \frac{h}{\sqrt{\frac{me^2}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{2\pi r}}} = \frac{h}{\sqrt{\left(\frac{me^2}{2\varepsilon_0} \right)^2 \cdot \frac{1}{(nh)^2}}} = \frac{2\varepsilon_0}{me^2} nh^2$$

となり、確かに定在波（円周長は波長の整数倍）となっている。