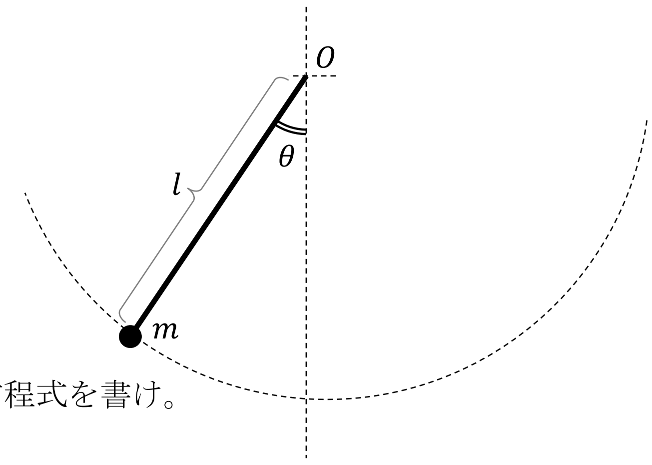
名前〔　　　　　　　　　　　　〕学生証番号〔　　　　　　　　　　〕

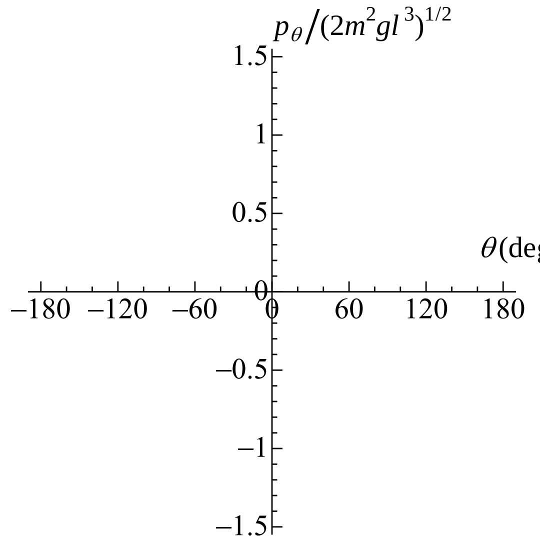
問１．空間反転$\vec{x} \to -\vec{x}$ に対し、「速度」と「角運動量」と「ねじ（らせん）」はどう変化するか説明せよ。(ねじについては言葉で説明して良い)

問２．軽くて硬い棒の先端に質点が付いた振り子の運動を調べよう。極座標θを用いてラグランジアンLとオイラーラグランジュ方程式を書け。但し，位置エネルギーの原点は最下点とする。なお，問２～４においては棒の長さl は一定で，かつθは小さいとは限らないとする。



問３．前問２のLから，θに共役な運動量p_θを求めよ。さらに，LをハミルトニアンHに変換し，正準方程式を書け。

問４．前問２において $|\theta|$ の最大値θ_0 と質点の全エネルギーEとの関係を求めよ。そして， $\theta_0 = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi$の５つの場合について，質点の運動の軌跡のおよその形を位相空間(θ, p_θ)に描き，y軸（p_θ軸）と交差する点のp_θの値を全て示せ。また特異点があるかどうかも調べよ。



問５．前問２において$\theta_0 \ll 1$としてθの時間依存性を求めよ。次にその結果を使い，断熱不変量 $J = \oint p_\theta \, d\theta$を求めよ。(ヒント　$\theta_0 \ll 1$の場合、$\sin\theta_0 \simeq \theta_0$ 及び$\cos\theta_0 \simeq 1 - ½\theta_0^2$ と近似してよい。また，積分の計算では$\theta \to t$ と変数変換し，tの積分範囲は一周期とするとよい)
さらに何らかの理由で l が極めてゆっくりとわずかに縮んだとすると，θ_0がどのように変化するか説明せよ。

※余裕のある者は、振幅θ_0が小さくない場合の作用積分Jを計算してみよ（裏面使用時はチェック□）

名前〔　　　　　　　　　　　　　〕学生証番号〔　　　　　　　　　　〕

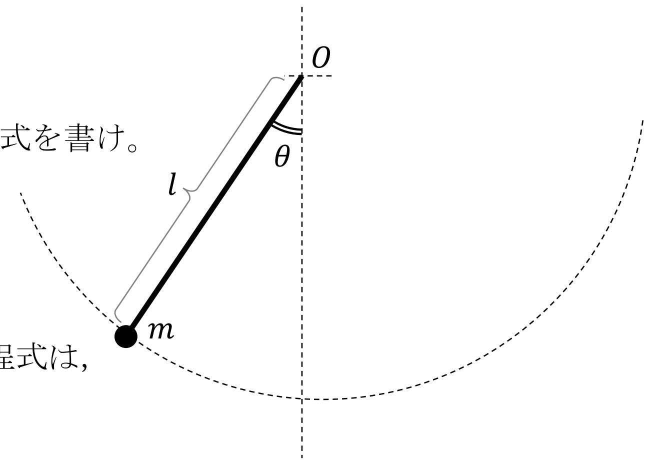
問１．空間反転に対し、「速度」と「角運動量」と「ねじ（らせん)」はどのように変化するか説明せよ。

空間反転$\vec{x} \to -\vec{x}$に対し、速度$d\vec{x}/dt$は逆向きになり、角運動量$m(d\vec{x}/dt)\times\vec{x}$ は不変、ねじは、右巻き⇔左巻きが入れ替わる。

問２．軽くて硬い棒の先端に質点が付いた振り子の運動を調べよう。極座標θを用いてラグランジアンLとオイラーラグランジュ方程式を書け。但し，位置エネルギーの原点は最下点とする。なお，問２～４においては棒の長さl は一定で，かつθは小さいとは限らないとする。

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) - mgl(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1-\cos\theta)$$ （注：$\dot{x} = \frac{d}{dt}(l\cos\theta) = -l\dot{\theta}\sin\theta$ など）

$$\therefore \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = -mgl\sin\theta - ml^2\ddot{\theta} = 0$$



問３．前問２のLから，θに共役な運動量p_θを求め，さらに，LをハミルトニアンHに変換し，正準方程式を書け。

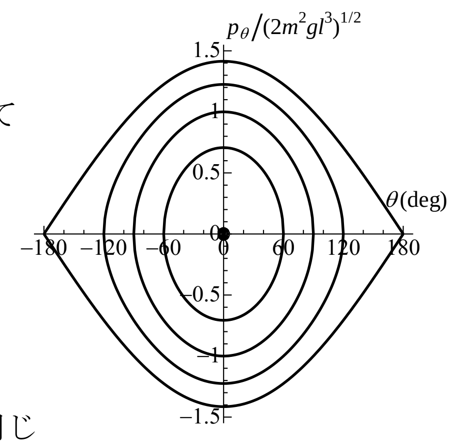
まず，運動量の定義より$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}$ である。これは角運動量。

ハミルトニアンは $H = p_\theta\dot{\theta} - L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1-\cos\theta) = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} + mgl(1-\cos\theta)$ で正準方程式は，

$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2}$ 及び，$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta$

問４．前問２において $|\theta|$ の最大値θ_0 と質点の全エネルギーEとの関係を求めよ。そして，$\theta_0 = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi$の５つの場合について，質点の運動の軌跡のおよその形を位相空間(θ, p_θ)に描き，y軸（p_θ軸）と交差する点のp_θの値を全て示せ。また特異点があるかどうかも調べよ。

軌跡の形は，問３の$E = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} + mgl(1-\cos\theta)$ を変形して$p_\theta = \pm\sqrt{2m^2gl^3}\sqrt{E/mgl - (1-\cos\theta)}$となる。次に振幅$\theta_0$と$E$の関係を求めると，振り子は$\theta = \pm\theta_0$で一旦停止（$p_\theta = 0$）するので，$0 = E/mgl - (1-\cos\theta_0)$であるから、上の式に代入し，$E$を消去すると
$p_\theta = \pm\sqrt{2m^2gl^3}\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}$　$(\theta = -\theta_0 \sim +\theta_0)$ いう形になる。



軌跡と y 軸との交点は，$p_\theta(\theta = 0)/\sqrt{2m^2gl^3} = \pm\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}$ より，$\theta_0 = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi$ の各場合について

それぞれ，$\theta = 0$では，$p_\theta/\sqrt{2m^2gl^3} = 0, \pm\sqrt{1/2}, \pm 1, \pm\sqrt{3/2}, \pm\sqrt{2}$ となる。

軌跡の勾配 $\partial p_\theta/\partial\theta \propto \mp\sin\theta/\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}$ は，
　$\theta \simeq \pm\theta_0$で勾配が発散（$\theta_0 = \pi$の場合以外）。よって軌跡は$x$軸と垂直に交差。
　$\theta \simeq 0$では，勾配はゼロ。よって軌跡はy軸と垂直に交差。
特異点は$\theta_0 = \pi$の場合について存在し，$\theta = \pm\pi$の点である。（頂上で一旦停止すると，その後，戻るか，同じ方向へ回るか不明になる。一見、軌跡は交差していないように見えるが，実は$\theta = \pm 180$は同じ状態）。

問５．前問２において$\theta_0 \ll 1$としてθの時間依存性を求めよ。次にその結果を使い，断熱不変量 $J = \oint p_\theta\, d\theta$を求めよ。（ヒント　$\theta_0 \ll 1$の場合、$\sin\theta_0 \simeq \theta_0$ 及び$\cos\theta_0 \simeq 1 - ½\theta_0^2$ と近似してよい。また，積分の計算では$\theta \to t$ と変数変換し，tの積分範囲は一周期とするとよい）
さらに何らかの理由で l が極めてゆっくりとわずかに縮んだとすると，θ_0がどのように変化するか説明せよ。

$\theta_0 \ll 1$より，オイラーラグランジュ方程式は，$mgl\theta + ml^2\ddot{\theta} = 0$となるので，$\omega = \sqrt{g/l}$（$\omega$は定数）とおけば，$\theta = \theta_0\cos\omega t$ が解。
（積分は一周期分なので，位相は気にしなくて良い）。
角運動量は，問３の結果より，$p_\theta = ml^2\dot{\theta} = -ml^2\theta_0\omega\sin\omega t$ である。
よって，作用積分は $J = \oint -ml^2\theta_0\omega\sin\omega t\, d(\theta_0\cos\omega t)$ となる。但し，積分範囲は一周期分 $t = 0 \sim 2\pi/\omega$である。以上より，

$$\therefore J = -ml^2\theta_0^2\omega\int_{t=0}^{t=2\pi/\omega}\sin\omega t\frac{d(\cos\omega t)}{dt}dt = ml^2\theta_0^2\omega^2\int\sin^2\omega t\, dt = ml^2\theta_0^2\omega^2[t/2]_0^{2\pi/\omega} = \pi ml^2\theta_0^2\omega = \pi ml^{3/2}\theta_0^2 g^{1/2}$$

J は断熱不変量で変化しないので，l をゆっくり縮めると，振幅は$\theta_0 \propto l^{-3/4}$ となり増えて行く。

※振幅が小さくない場合、$J = 2\sqrt{2m^2gl^3}\int_{-\theta_0}^{+\theta_0}\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}\, d\theta = 2m\sqrt{2gl^3}f(\theta_0)$　（$f(\theta_0)$はθ_0にのみ依存し，lには依らない関数。）

$f(\theta_0)$は単調増加関数であるので，l をゆっくり縮めるとθ_0は，やはり増加して行く。

※余裕のある者は、振幅θ_0が小さくない場合の作用積分Jを計算してみよ（裏面使用時はチェック□）