解析力学定期試験 2006, 7/21, 1100-1230, 9-353

全ての問題において途中の計算も記して下さい。

1. 正準変換

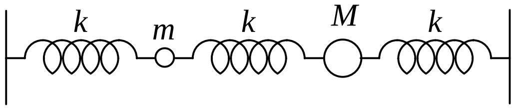
ハミルトニアン $H=\dfrac{2}{m}\left(p^2-2\sqrt{3}xp+3x^2\right)$ を正準変換 $\begin{cases} X=x\cos\theta+p\sin\theta \\ P=-x\sin\theta+p\cos\theta \end{cases}$ （但し θ は定数）によって変換し、θ を上手く取ると、実は極めて良く知られた運動と等価であることを示そう。

2. 荷電粒子に対するラグランジアンとハミルトニアン

静電磁場中の荷電粒子のハミルトニアン $H(\vec{x},\vec{p})=\dfrac{1}{2m}\left(\vec{p}-e\vec{A}\right)^2+e\phi(\vec{x})$ について、磁場 $(0,0,B_0)$、電場 $(E_0,0,0)$ の場合の式を書いてみよう。次に対応するラグランジアンを定義式 $L(\vec{x},\vec{v})=\vec{p}\cdot\vec{v}-H(\vec{x},\vec{p})$ から計算してみよう。さらにオイラー・ラグランジュの式から運動方程式も導出してみよう。注意)ラグランジアンは p は含んではいけない。

3. 基準振動

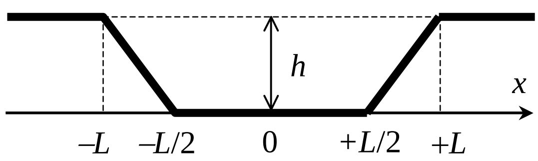
二つの質点が右図のように両側の壁とバネで繋がれ、一次元調和振動をしているとする。この系のラグランジアンを書き下し、次に運動方程式を導き、基準振動数を求めよう。さらに、$m=M$ の場合について基準座標も求めよう。



4. 位相空間

図に示すようなポテンシャル中を一次元運動する質量 m の質点について、まず、ハミルトニアンを書き下そう（ヒント— x の範囲について場合分けが必要だ)。

次に位相空間における (x, p) の軌跡を描こう。質点のエネルギー E (運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和)が $E<mgh$，$E=mgh$，$E>mgh$ の各場合について何本か描いて見よう。



【解答】

1) $\phi=\dfrac{\pi}{3}$ と置けば、$\begin{cases} X=\dfrac{x}{2}+\dfrac{\sqrt{3}p}{2} \\ P=\dfrac{-\sqrt{3}x}{2}+\dfrac{p}{2} \end{cases}$ なので、$H=\dfrac{2}{m}\left(p^2-2\sqrt{3}xp+3x^2\right)=\dfrac{2}{m}\cdot 4P^2=\dfrac{P^2}{m/8}$ となり、

これは自由な質点と等価。

2) $\vec{A}=B_0\left(-y/2, x/2, 0\right)$, $\phi=-E_0 x$ と置くと、$H=\dfrac{1}{2m}\left(p^2-eB_0\dfrac{-p_x y+p_y x}{2}+\dfrac{x^2+y^2}{4}\right)-eE_0 x$

ラグランジアンへの変換は与えられた定義式に $\vec{\upsilon}=\dfrac{\partial H}{\partial \vec{p}}=\dfrac{\vec{p}-e\vec{A}}{m}$ を代入して、

$L\left(\vec{x},\vec{\upsilon}\right)=\left(m\vec{\upsilon}+e\vec{A}\right)\cdot\vec{\upsilon}-\dfrac{1}{2m}\left(m\vec{\upsilon}\right)^2-e\phi=\dfrac{1}{2}m\upsilon^2+e\vec{A}\cdot\vec{\upsilon}-e\phi$ となる。具体的に与えられた静電磁場の

場合は、$L=\dfrac{1}{2}m\upsilon^2+\dfrac{eB_0}{2}\left(-y\upsilon_x+x\upsilon_y\right)+eE_0 x$

オイラーラグランジュの式に代入すると運動方程式は$\begin{cases} \dfrac{eB_0\upsilon_y}{2}+eE_0-m\dot{\upsilon}_x=0 \\ -\dfrac{eB_0\upsilon_x}{2}-m\dot{\upsilon}_y=0 \end{cases}$

3) 各質点の位置ずれを x, y とすると $L=\dfrac{1}{2}m\dot{x}^2+\dfrac{1}{2}M\dot{y}^2-\dfrac{1}{2}kx^2-\dfrac{1}{2}k\left(x-y\right)^2-\dfrac{1}{2}ky^2$

E.-L.方程式$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}-\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}=-kx-k\left(x-y\right)-m\ddot{x}=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}-\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}}=+k\left(x-y\right)-ky-M\ddot{y}=0 \end{cases}$ より、$\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}2\alpha & -\alpha \\ -\beta & 2\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$、但し$\begin{cases}\alpha=\sqrt{k/m}\\ \beta=\sqrt{k/M}\end{cases}$

対角化して $\left(2\alpha-\lambda\right)\left(2\beta-\lambda\right)-\alpha\beta=0$ より $\lambda^2-2\left(\alpha+\beta\right)\lambda+3\alpha\beta=0$ なので、

$\therefore \lambda=\left(\alpha+\beta\right)\pm\sqrt{\left(\alpha+\beta\right)^2-3\alpha\beta}$

新しい座標系では、$\begin{pmatrix}\ddot{X}\\ \ddot{Y}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}$ なので、基準振動数は、$\omega_\pm=\sqrt{\lambda_\pm}$

固有ベクトルを$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$と置くと、$2\alpha A-\alpha B=\lambda_{\pm}A$, $\therefore B=\frac{1}{\alpha}\left((\alpha-\beta)\mp\sqrt{(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta}\right)A$

$\alpha=\beta$　と置けば、$\therefore B=\frac{1}{\alpha}(\mp\alpha)A=\mp A$なので、$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (規格化はしなくとも可)

4) $$H=\frac{p^2}{2m}+mgU(x)=\begin{cases} \frac{p^2}{2m}+mgh & (L<|x|) \\ \frac{p^2}{2m}+mgh\left(\frac{2x}{L}-1\right) & (L/2<|x|<L) \\ \frac{p^2}{2m} & (|x|<L/2) \end{cases}$$

より、穴の底と外側では E=H の軌跡は水平線になる。

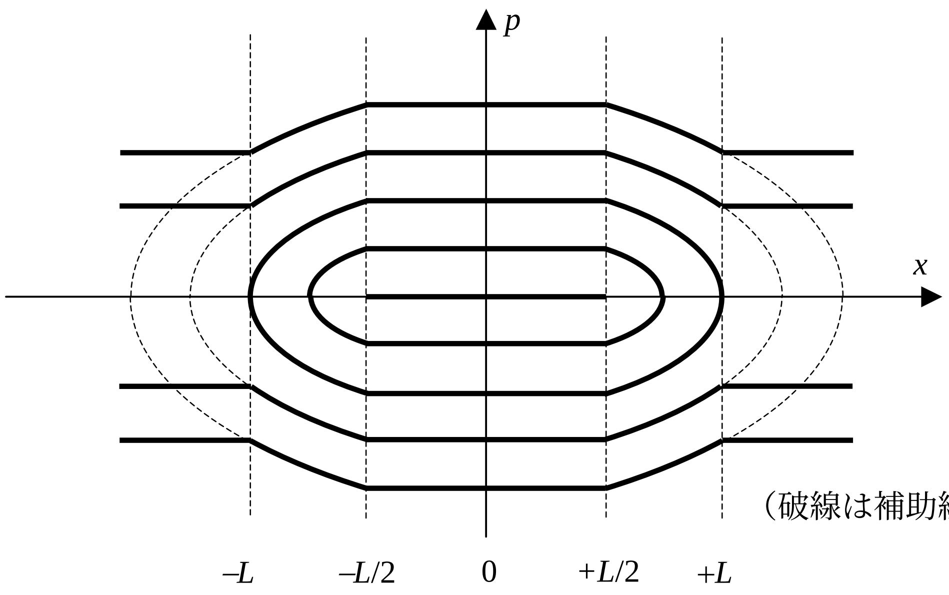
穴の中の右斜面上では$x=\frac{L}{2}\left(\frac{E-p^2/2m}{mgh}+1\right)$なので、横向きの放物線で頂点は$\left(\frac{L}{2}\left(\frac{E}{mgh}+1\right),0\right)$

$E=0$では底面のどこかで静止($E\to+0$の極限では水平線)

$E<mgh$では斜面の途中まで上る往復運動

$E=mgh$では斜面のちょうど上まで登り切って停止

$E>mgh$では斜面を登り切って、減速して外へ出て行く



（破線は補助線）