$\boxed{\text{微分の復習}}$

- 関数の積の微分 $\dfrac{d\left(f(x)g(x)\right)}{dx}=\dfrac{df(x)}{dx}g(x)+f(x)\dfrac{dg(x)}{dx}$
- 合成関数の微分 $\dfrac{df\left(g(x)\right)}{dx}=\dfrac{df(g)}{dg}\dfrac{dg(x)}{dx}$
- 変数の上の点＝時間による微分を表す。$\dot{x}=\dfrac{dx}{dt}$，$\dot{\theta}=\dfrac{d\theta}{dt}$など。

例1）xyをxで微分します。

$$\frac{d}{dx}(xy)=\frac{dx}{dx}y+x\frac{dy}{dx}=1\cdot y+x\frac{dy}{dx}=y+x\frac{dy}{dx}$$

例1）$\sin x^2$をxで微分します。$x^2=X$とおくところがミソです。

$$\frac{d}{dx}\sin x^2=\left(\frac{d}{dx^2}\sin x^2\right)\frac{dx^2}{dx}=\left(\frac{d}{dX}\sin X\right)\frac{dx^2}{dx}=\left(\frac{d}{dX}\sin X\right)2x=\cos X\cdot 2x$$

変数$x^2=X$を元に戻して、$=\cos x^2\cdot 2x$

例2）$x=r\cos\theta$を時間で微分します。rもθも時間の関数$r(t),\theta(t)$です。

$$\frac{d}{dt}x=\frac{d}{dt}(r\cos\theta)$$

関数の積の公式を使います。

$r=f(t)$, $\theta=g(t)$，微分変数をt、と置いて公式に代入。

$$=\frac{dr}{dt}\cos\theta+r\frac{d\cos\theta}{dt}$$

第一項目はこれで終わりです。二項目は合成関数です。

$f(\theta)=\cos\theta$, $g(t)=\theta(t)$と置いて公式に代入。

$$=\frac{dr}{dt}\cos\theta+r\left(\frac{d\cos\theta}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt}$$

$$\therefore\ \dot{x}=\dot{r}\cos\theta+r(-\sin\theta)\dot{\theta}=\dot{r}\cos\theta-r\sin\theta\,\dot{\theta}$$

例3）今度は$y=r\sin\theta$です。

$$\dot{y}=\frac{d}{dt}y=\frac{d}{dt}(r\sin\theta)=\dot{r}\sin\theta+r\cos\theta\,\dot{\theta}$$

ここで、$\dot{x}^2+\dot{y}^2$、すなわち、速度ベクトルの絶対値の自乗を計算してみましょう。すると、

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=\dot{r}^2\cos^2\theta-2\dot{r}\cos\theta\,r\sin\theta\,\dot{\theta}+r^2\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2+\dot{r}^2\sin^2\theta+2\dot{r}\sin\theta\,r\cos\theta\,\dot{\theta}+r^2\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2$$

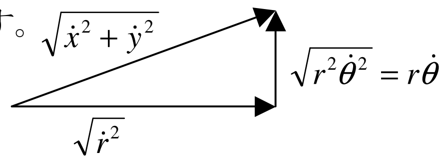
ここで、二項目と四項目（クロスターム同士）はキャンセルして、

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=\dot{r}^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2+\dot{r}^2\sin^2\theta+r^2\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2$$

となります。$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$を使うと、

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2$$

という結果が得られます。これは、速度の$\vec{r}=(x,y)$に平行な成分（まっすぐ進む成分）と、垂直な成分（回転運動）に分けられたことを意味します。



例4） $y=r\cos\theta\sin\varphi$を時間で微分します。

$$\frac{d}{dt}y=\frac{d}{dt}(r\cos\theta\sin\varphi)=\frac{dr}{dt}\cos\theta\sin\varphi+r\frac{d\cos\theta}{dt}\sin\varphi+r\cos\theta\frac{d\sin\varphi}{dt}$$ 積の公式です。

$$=\dot{r}\cos\theta\sin\varphi+r(-\sin\theta)\frac{d\theta}{dt}\sin\varphi+r\cos\theta\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}$$ 合成関数の微分です。

$$=\dot{r}\cos\theta\sin\varphi-r\sin\theta\,\dot{\theta}\sin\varphi+r\cos\theta\cos\varphi\,\dot{\varphi}$$

例4） 最後に、$x=r\cos\theta$を時間で二階微分してみます。

さっきやった例2の結果を使って、

$$\ddot{x}=\frac{d}{dt}\dot{x}=\frac{d}{dt}(\dot{r}\cos\theta-r\sin\theta\,\dot{\theta})=\ddot{r}\cos\theta-\dot{r}\sin\theta\,\dot{\theta}-(\dot{r}\sin\theta\dot{\theta}+r(\cos\theta\dot{\theta})\dot{\theta}+r\sin\theta\ddot{\theta})$$

$$=\ddot{r}\cos\theta-2\dot{r}\sin\theta\,\dot{\theta}-r\cos\theta\,\dot{\theta}^2-r\sin\theta\,\ddot{\theta}$$

とても複雑そうな式になってしまいました。だからこそラグランジアンが便利（二階微分を計算しなくて済む）なのです。

偏微分の復習

$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$は、$y$を定数だと思って、$f$を$x$だけについて微分します。

例）$L(q,\dot{q})=\dot{q}^2-q^2$に対し、$\frac{\partial}{\partial q}L(q,\dot{q})=-2q$ 、$\frac{\partial}{\partial \dot{q}}L(q,\dot{q})=2\dot{q}$です。

（だから、オイラー・ラグランジュの運動方程式は、$\frac{d}{dt}(2\dot{q})-(-2q)=2\ddot{q}+2q=0$となります）

例1）二次元極座標のラグランジアンは、ポテンシャルが無い場合、

$L(r,\theta,\dot{r},\dot{\theta})=\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)$ となります。これは微分の復習での例3です。

この場合、オイラー・ラグランジュの運動方程式は、変数が二つですから、

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}-\frac{\partial L}{\partial r}=0$及び、$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}-\frac{\partial L}{\partial \theta}=0$の二本となります。実際に偏微分してみると、

$\frac{d}{dt}(m\dot{r})-\left(mr\dot{\theta}^2\right)=0$, $\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right)-0=0$となって、整理すると、

$m\ddot{r}-mr\dot{\theta}^2=0$, $\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right)=0$

$\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=0,\ mr^2\dot{\theta}=$一定　となります。二つ目の式は「角運動量保存則」です。

例2）具体的な関数を偏微分して見ましょう。

$f=\sqrt{x^2+y^2}$ に対して、$\frac{\partial f}{\partial x}$と、$\frac{\partial f}{\partial y}$を計算して見ましょう。

これも$X=x^2+y^2$と置いて合成関数の公式を使えば、

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial\sqrt{X}}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{X}}\frac{\partial X}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial\left(x^2+y^2\right)}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$ です。

例3）上の例を応用して、

三次元の極座標$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ に対して、$\nabla r=\left(\frac{\partial r}{\partial x},\frac{\partial r}{\partial y},\frac{\partial r}{\partial z}\right)$を計算してみましょう。

これは、重力や静電ポテンシャル（クーロンポテンシャル）による力です。上の例を参考にして

今度は$X=x^2+y^2+z^2$と置いて、合成関数の公式を使えば、

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial\sqrt{X}}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{X}}\frac{\partial\left(x^2+y^2+z^2\right)}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r}$$となって、$y,\ z$ については、式の形

の対称性から、$\dfrac{\partial r}{\partial y}=\dfrac{y}{r}$, $\dfrac{\partial r}{\partial z}=\dfrac{z}{r}$ であることがわかるので、これらを並べて、

$$\nabla r=\left(\frac{\partial r}{\partial x},\frac{\partial r}{\partial y},\frac{\partial r}{\partial z}\right)=\left(\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}\right)=\frac{1}{r}(x,y,z)=\frac{\vec{r}}{r}$$

と求まります。

例4) $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ とした場合、$\dfrac{\partial r}{\partial x},\dfrac{\partial r}{\partial y},\dfrac{\partial \theta}{\partial x},\dfrac{\partial \theta}{\partial y}$ や、$\dfrac{\partial x}{\partial r},\dfrac{\partial y}{\partial r},\dfrac{\partial x}{\partial \theta},\dfrac{\partial y}{\partial \theta}$ を計算してみます。

$\dfrac{\partial r}{\partial x}=\dfrac{\partial r(x,y)}{\partial x}=\dfrac{\partial\sqrt{x^2+y^2}}{\partial x}$ です。真ん中の式は、「r が x,y の関数であることに気付いてね」ということを言ってるのです。これに気付きさえすれば、あとは x で偏微分するだけでよく、

$\therefore\dfrac{\partial r}{\partial x}=\dfrac{x}{r}$ となります。次に、θ についてですが、

$\dfrac{\partial \theta}{\partial x}=\dfrac{\partial \theta(x,y)}{\partial x}$ のはずなのですが、θ をどうやって x,y で表したら良いでしょうか。

$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ より、$\theta=\arctan\dfrac{y}{x}$ です。これを偏微分しても、もちろん OK です。別の方法として、

$x=r\cos\theta$ の両辺を x で偏微分してみましょう。すると、

$1=\dfrac{\partial r}{\partial x}\cos\theta-r\sin\theta\dfrac{\partial \theta}{\partial x}=\dfrac{x}{r}\cos\theta-r\sin\theta\dfrac{\partial \theta}{\partial x}$ となり、

よって、

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}=\frac{1}{r\sin\theta}\left(-1+\frac{x}{r}\cos\theta\right)=\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{x\cos\theta-r}{r}\right)=\frac{x\cos\theta-r}{r^2\sin\theta}=\frac{r\cos^2\theta-r}{r^2\sin\theta}=-\frac{\sin\theta}{r}$$

が得られます。$\dfrac{\partial \theta}{\partial y}$ も同様で、$y=r\sin\theta$ の両辺を y で偏微分して、

$1=\dfrac{\partial r}{\partial y}\sin\theta+r\cos\theta\dfrac{\partial \theta}{\partial y}=\dfrac{y}{r}\sin\theta+r\cos\theta\dfrac{\partial \theta}{\partial y}$ となりますので、

よって、

$$\frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{1}{r\cos\theta}\left(1-\frac{y}{r}\sin\theta\right)=\frac{1}{r\cos\theta}\left(\frac{r-y\sin\theta}{r}\right)=\frac{r-r\sin^2\theta}{r^2\cos\theta}=\frac{r\cos^2\theta}{r^2\cos\theta}=\frac{\cos\theta}{r}$$

が得られました。

$\dfrac{\partial x}{\partial r},\dfrac{\partial y}{\partial r},\dfrac{\partial x}{\partial \theta},\dfrac{\partial y}{\partial \theta}$ については、$x=r\cos\theta$ や $y=r\sin\theta$ の両辺を今度は r や θ で偏微分します。

例えば、$\dfrac{\partial x}{\partial r}$ については、$x=r\cos\theta$ を r で偏微分すると、$\dfrac{\partial x}{\partial r}=\dfrac{\partial x(r,\theta)}{\partial r}=\cos\theta$ です。

全微分

最後に全微分です。全微分は、独立な変数全てについて、微分します。

$f(x,y)$で、x,yとも時間の関数$x(t),y(t)$であるとき、

$$\frac{d}{dt}f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

となります。ここまでは覚えていると思いますが、上式でdtを払った、

$$df(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

をfの全微分と呼びます。これは、二つの変数x,yが僅かに変化した(右辺)とき、$f(x,y)$がどれくらい変化するか(左辺)を表しています。$f(x,y)$のテイラー展開の第二項目に相当します。(ちなみに、第一項目は$f(0,0)$です)。

またこのように書けるとき、『$f(x,y)$はx,yの関数になっている』とか、『独立変数はx,yである』と言います。逆も成り立つので、これを示したければ、fの全微分を計算してみれば良いのです。

〔多変数の関数のテイラー展開〕

$f(x+dx,y+dx)$をdx,dyのべきで展開します。

第一項、$dx,dy=0$の場合のfです。すなわち、$f(x,y)$です。

第二項、fの変化を「直線」で近似した式です。$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$

三次元では、$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy+\frac{\partial f(x,y)}{\partial z}dz$なのでまとめて、$\nabla f\cdot\vec{x}$と書く場合が多いです。

第三項、fの変化を「二次関数」で近似した式です。

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial x}dxdx+\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}dydx\right)$$