０．前回

正準変換＝$\begin{cases} q_i = q_i(Q_1\cdots Q_n, P_1\cdots P_n) \\ p_i = p_i(Q_1\cdots Q_n, P_1\cdots P_n) \end{cases}$

正準方程式（＝運動方程式）が不変に保たれる

〔やり方〕

１）母関数$W = W(q,Q)$を決める。

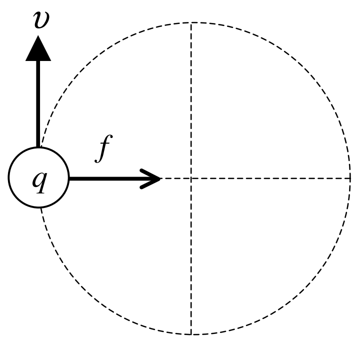
２）変換の定義式$\begin{cases} p = \partial W(q,Q)/\partial q \\ P = -\partial W(q,Q)/\partial Q \end{cases}$を書き換えて、$\begin{cases} p = \cdots \\ q = \cdots \end{cases}$という形にし、

ハミルトニアン$H(p,q)$に代入する。

３）新しいハミルトニアン$H(P,Q)$は新しい変数について正準方程式を満たす。

Today's Goal — 磁場の入った Hamiltonian

０　ローレンツ力による運動



【電磁気の復習】質量 m の電荷 q が電場・磁場中で運動

ローレンツ力 $\vec{f} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}$

運動方程式$m\ddot{\vec{x}} = \vec{f}$　$\rightarrow$ サイクロトロン運動

これをハミルトニアンで表すとどうなるでしょうか。

答：$H = \dfrac{1}{2m}\left(\vec{p} - q\vec{A}\right)^2 + q\phi$

となるのですがこれを導出してみましょう。このハミルトニアンに対する正準方程式が確かにローレンツ力になっている、という確かめをやります。

結果は非常に重要で、量子力学でも頻繁に使います。

１ 〔準備〕ベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャル

$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \longrightarrow$ 磁場の定義

自動的にマックスウェルの方程式$\nabla \cdot \vec{B} = 0$を満たしている

〔意味〕A の渦が磁場 ⇒ A は電流に平行な量

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \xrightarrow{\nabla\times} \quad \nabla \times \vec{E} = -\overbrace{\nabla \times (\nabla\phi)}^{0} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \vec{A}\right) = -\dot{\vec{B}}$$

マックスウェルの方程式(ファラデーの法則)

〔意味〕磁場変化を打ち消すような誘導起電力

２ 正準方程式をベクトルで書く

ベクトルと行列を使って書くと大変すっきりとした形にまとめられます。

２－１ 〔$\dot{x} = \nabla_p H$〕

$$\dot{x} = \nabla_p H = \frac{1}{2m}\frac{\partial}{\partial \vec{p}}\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)^2 = \frac{1}{2m}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial p_x}\left(\left(p_x - eA_x\right)^2 + \left(p_y - eA_y\right)^2 + \left(p_z - eA_z\right)^2\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial p_x}(\cdots) \\ \dfrac{\partial}{\partial p_z}(\cdots) \end{pmatrix}$$

微分はそれぞれの成分のみが残る(x 成分は p_x のみ, *etc.*)ので、

$$= \frac{1}{2m}\begin{pmatrix} 2\left(p_x - eA_x\right) \\ 2\left(p_y - eA_y\right) \\ 2\left(p_z - eA_z\right) \end{pmatrix} = \frac{1}{m}\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)$$

となり、ここで既に$\boldsymbol{v}$と p の関係が非自明となるので驚いて下さい***!***

注）かっこよくやるには、

$$\dot{\vec{x}} = \nabla_{\vec{p}} H = \tfrac{1}{2m}\nabla_{\vec{p}}\left(\vec{p}-e\vec{A}\right)^2 = \tfrac{1}{2m}\nabla_{\vec{p}}\left({}^t\!\left(\vec{p}-e\vec{A}\right)\left(\vec{p}-e\vec{A}\right)\right)$$

$$= \tfrac{1}{2m}\nabla_{\vec{p}}\left({}^t\!\left(\vec{p}-e\vec{A}\right)\left(\vec{p}-e\vec{A}\right)\right)$$

どちらかに作用する

$$= \tfrac{1}{m}\left(\nabla_{\vec{p}}\ {}^t\!\left(\vec{p}-e\vec{A}\right)\right)\left(\vec{p}-e\vec{A}\right) = -\tfrac{e}{m}\underbrace{\left(\nabla_{\vec{p}}\ {}^t\vec{p}\right)}_{I}\left(\vec{p}-e\vec{A}\right) = -\tfrac{e}{m}\left(\vec{p}-e\vec{A}\right)$$

ここで、縦ベクトル・横ベクトルの積は行列で、

$$\nabla_{\vec{p}}\ {}^t\vec{p} = \begin{pmatrix} \partial/\partial p_x \\ \partial/\partial p_y \\ \partial/\partial p_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x & p_y & p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial p_x/\partial p_x & \partial p_y/\partial p_x & \partial p_z/\partial p_x \\ \partial p_x/\partial p_y & \partial p_y/\partial p_y & \partial p_z/\partial p_y \\ \partial p_x/\partial p_z & \partial p_y/\partial p_z & \partial p_z/\partial p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

です。　$\Leftrightarrow$ 一方、横ベクトル・縦ベクトルの場合は内積で、

${}^t\nabla_{\vec{p}}\vec{p} = \nabla_{\vec{p}}\cdot\vec{p} = 3$ とスカラー量になります。

２－２〔 $\dot{\vec{p}} = -\nabla H$ 〕

$$\dot{\vec{p}} = -\nabla H = -\frac{1}{2m}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\left(p_x-eA_x\right)^2+\left(p_y-eA_y\right)^2+\left(p_z-eA_z\right)^2\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial y}(\cdots) \\ \dfrac{\partial}{\partial z}(\cdots) \end{pmatrix} - e\nabla\phi$$

$$= -\frac{1}{2m}\begin{pmatrix} 2\left(p_x-eA_x\right)(-e)\dfrac{\partial A_x}{\partial x} + 2\left(p_y-eA_y\right)(-e)\dfrac{\partial A_y}{\partial x} + 2\left(p_z-eA_z\right)(-e)\dfrac{\partial A_z}{\partial x} \\ 2(\cdots)\dfrac{\partial A_x}{\partial y} + 2(\cdots)\dfrac{\partial A_y}{\partial y} + 2(\cdots)\dfrac{\partial A_z}{\partial y} \\ 2(\cdots)\dfrac{\partial A_x}{\partial z} + 2(\cdots)\dfrac{\partial A_y}{\partial z} + 2(\cdots)\dfrac{\partial A_z}{\partial z} \end{pmatrix} - e\nabla\phi$$

のように、今度は微分演算子∇はすべて$\vec{A}$のみに作用します。

$$=\frac{e}{m}\begin{pmatrix} (p_x-eA_x)\dfrac{\partial A_x}{\partial x}+(p_y-eA_y)\dfrac{\partial A_y}{\partial x}+(p_z-eA_z)\dfrac{\partial A_z}{\partial x} \\ (\cdots)\dfrac{\partial A_x}{\partial y}+(\cdots)\dfrac{\partial A_y}{\partial y}+(\cdots)\dfrac{\partial A_z}{\partial y} \\ (\cdots)\dfrac{\partial A_x}{\partial z}+(\cdots)\dfrac{\partial A_y}{\partial z}+(\cdots)\dfrac{\partial A_z}{\partial z} \end{pmatrix}-e\nabla\phi$$

ここで、各行を良く見ると、内積の形をしています。

たとえば一番上の行は、$(\vec{p}-e\vec{A})\cdot\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial x}$です。よって、行列を使って書けて、

$$=\frac{e}{m}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial A_x}{\partial x} & \dfrac{\partial A_y}{\partial x} & \dfrac{\partial A_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial A_x}{\partial y} & \dfrac{\partial A_y}{\partial y} & \dfrac{\partial A_z}{\partial y} \\ \dfrac{\partial A_x}{\partial z} & \dfrac{\partial A_y}{\partial z} & \dfrac{\partial A_z}{\partial z} \end{pmatrix}(\vec{p}-e\vec{A})-e\nabla\phi$$

となります。

さらに、この行列は、$\begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_x & A_y & A_z \end{pmatrix}=\nabla\ {}^t\vec{A}$　と書けるので、

$$=-\frac{e}{m}\left(\nabla\ {}^t\vec{A}\right)\cdot\left(\vec{p}-e\vec{A}\right)-e\nabla\phi$$

$\therefore\ \dot{\vec{p}}=e\left(\nabla\ {}^t\vec{A}\right)\vec{v}-e\nabla\phi$となります。

ここで、$\left(\nabla\ {}^t\vec{A}\right)\cdots$は、微分はカッコの中だけに作用することを意味しています。

これもスマートにやるには、

$$\dot{\vec{p}}=-\nabla\left(\frac{1}{2m}\left(\vec{p}-e\vec{A}\right)^2+e\phi\right)=-\frac{1}{2m}\left(\nabla\ {}^t\left(\vec{p}-e\vec{A}\right)\left(\vec{p}-e\vec{A}\right)\right)-e\nabla\phi$$

$$= -\frac{1}{m}\left(\nabla\, {}^t\left(\vec{p}-e\vec{A}\right)\right)\left(\vec{p}-e\vec{A}\right) - e\nabla\phi = \frac{e}{m}\left(\nabla\, {}^t\vec{A}\right)\left(\vec{p}-e\vec{A}\right)-e\nabla\phi$$

$$= \frac{e}{m}\left(\nabla\, {}^t\vec{A}\right)\underbrace{\left(\vec{p}-e\vec{A}\right)}_{m\vec{v}} - e\nabla\phi$$

これに２の結果$m\vec{v} = \vec{p} - e\vec{A}$を代入すると、

$$\therefore \dot{\vec{p}} = e\left(\nabla\, {}^t\vec{A}\right)\vec{v} - e\nabla\phi$$

と、同じ結果が得られます。

３加速度

２-２の結果を加速度に直すために、２式を時間微分（全微分）すると、

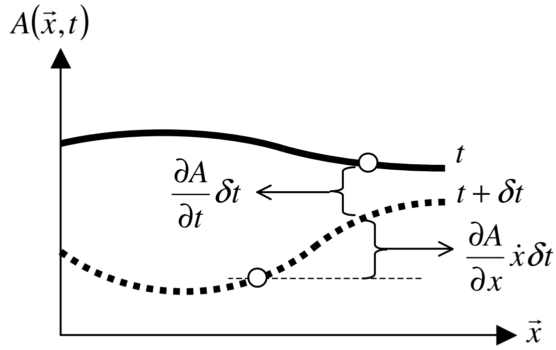
$$\ddot{\vec{x}} = \frac{1}{m}\frac{d}{dt}\left(\vec{p}-q\vec{A}\right) = \frac{\dot{\vec{p}}}{m} - \frac{q}{m}\frac{d}{dt}\vec{A}(\vec{x},t)$$

$$= \frac{\dot{\vec{p}}}{m} - \frac{q}{m}\begin{pmatrix} {}^t\nabla A_x(\vec{x},t) \\ {}^t\nabla A_y(\vec{x},t) \\ {}^t\nabla A_z(\vec{x},t) \end{pmatrix}\frac{d\vec{x}}{dt} - \frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\vec{x},t) = \frac{\dot{\vec{p}}}{m} - \frac{q}{m}\,{}^t\!\left(\nabla\, {}^t A_x(\vec{x},t)\right)\frac{d\vec{x}}{dt} - \frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\vec{x},t)$$

となります。$\vec{A}$の全微分$\dfrac{d\vec{A}}{dt}$の意味を下の図で説明しておきます。

ポテンシャルは$\vec{A} = \vec{A}(\vec{x},t)$のように
「場の変数」ですから、場所と時間に
依存します。よって微分は、
- 質点が動いたことによる変化
- 時間依存性による変化

と二つの項が出てきます【重要】



念のため、$\left(\dfrac{d}{dt}\vec{A}(\vec{x},t)\right)_x = \dfrac{d}{dt}A_x(\vec{x},t) = \underbrace{\dfrac{\partial A_x}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial A_y}{\partial x}\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{\partial A_z}{\partial x}\dfrac{dz}{dt}}_{{}^t\nabla A_x \cdot \dot{\vec{x}}} + \dfrac{\partial A_x}{\partial t}\underbrace{\dfrac{dt}{dt}}_{1}$

です。$\dot{\vec{x}}$が縦ベクトルなので、内積にするために無理やり、∇A_xを

横ベクトルにしています。さらに、$\begin{pmatrix} {}^t\nabla A_x \cdot \dot{x} \\ {}^t\nabla A_y \cdot \dot{x} \\ {}^t\nabla A_z \cdot \dot{x} \end{pmatrix}$のように三つ縦に重ねた

ベクトルを、行列と$\dot{x}$の積に分解するのですが、このとき、

$\left({}^t\nabla\vec{A}\right) = (\cdots\ \cdots\ \cdots)\begin{pmatrix}\vdots\\\vdots\end{pmatrix}$と書くと、div になってしまうので、

${}^t\left(\nabla\ {}^t\vec{A}\right) = {}^t\left(\begin{pmatrix}\vdots\\\vdots\end{pmatrix}(\cdots\ \cdots\ \cdots)\right)$としているわけです。

次に、2-2式$\dot{\vec{p}} = e\left(\nabla\ {}^t\vec{A}\right)\vec{v} - e\nabla\phi$を、今導いた第一項の$\dot{\vec{p}}$へ代入すると、

$$\therefore \ddot{\vec{x}} = \overbrace{\frac{e}{m}\left(\nabla\ {}^t\vec{A}\right)\vec{v} - \frac{e}{m}\nabla\phi}^{\dot{\vec{p}}/m} - \frac{q}{m}\ {}^t\left(\nabla\ {}^t\vec{A}\right)\vec{v} - \frac{1}{m}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

順番(第二項と第三項)を入れ替え、電場の式$\vec{E} = -\nabla\phi - \dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}$を代入して、

$$= \frac{q}{m}\left(\left(\nabla\ {}^t\vec{A}\right)\vec{v} - {}^t\left(\nabla\ {}^t\vec{A}\right)\vec{v}\right) \underbrace{- \frac{q}{m}\nabla\phi - \frac{1}{m}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}}_{e\vec{E}/m}$$

$$\therefore \ddot{\vec{x}} = \frac{q}{m}\left[\left(\nabla\ {}^t\vec{A}\right) - {}^t\left(\nabla\ {}^t\vec{A}\right)\right]\vec{v}\ + \frac{q}{m}\vec{E}$$

と、対称な形になりました。

４外積の形へ

$\left(\nabla\ {}^t\vec{A}\right) - {}^t\left(\nabla\ {}^t\vec{A}\right)$を計算してみます。転置行列の差ですから、対角成分が消えそう

です。実際、

$$
{}^t\nabla\vec{A} = {}^t\nabla\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial x} & \frac{\partial A_x}{\partial y} & \frac{\partial A_x}{\partial z} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} & \frac{\partial A_y}{\partial y} & \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_z}{\partial x} & \frac{\partial A_z}{\partial y} & \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{pmatrix} = {}^t\begin{pmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial x} & \frac{\partial A_y}{\partial x} & \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_x}{\partial y} & \frac{\partial A_y}{\partial y} & \frac{\partial A_z}{\partial y} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} & \frac{\partial A_y}{\partial z} & \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{pmatrix} = {}^t\left(\nabla\, {}^t\vec{A}\right)
$$

の差を取ると、

$$
\left(\nabla\, {}^t\vec{A}\right) - {}^t\left(\nabla\, {}^t\vec{A}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} & \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \\ -\frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} & 0 & \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ -\frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial z} & -\frac{\partial A_z}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial z} & 0 \end{pmatrix}
$$

となって、この「微分の差」はどこかで見たことがあります。そう、rot 演算子の成分です。よって、

$$
= \begin{pmatrix} 0 & (\nabla\times\vec{A})_z & -(\nabla\times\vec{A})_y \\ -(\nabla\times\vec{A})_z & 0 & (\nabla\times\vec{A})_x \\ (\nabla\times\vec{A})_y & -(\nabla\times\vec{A})_x & 0 \end{pmatrix}
$$

ここでベクトルポテンシャルの rot は磁場（$\nabla\times\vec{A} = \vec{B}$）ですから、

$$
= \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y \\ -B_z & 0 & B_x \\ B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}
$$

となります。これと、速度ベクトル$\vec{v}$との積をとると、

$$
= \begin{pmatrix} B_z v_y - B_y v_z \\ -B_z v_x + B_x v_z \\ B_y v_x - B_x v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\vec{v}\times\vec{B})_x \\ (\vec{v}\times\vec{B})_y \\ (\vec{v}\times\vec{B})_z \end{pmatrix} = \vec{v}\times\vec{B}
$$

とまたもや外積の成分で書けてしまいました。よって、

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{q}{m}\underbrace{\left(\left(\nabla{}^t\vec{A}\right) - {}^t\left(\nabla{}^t\vec{A}\right)\right)\vec{v}}_{v\times\vec{B}} + \frac{q}{m}\vec{E}$$

$\therefore m\ddot{\vec{x}} = \underbrace{q\vec{v}\times\vec{B} + q\vec{E}}_{\vec{f}}$ とローレンツ力による運動方程式が導かれました。

よって確かに $H = \dfrac{1}{2m}\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)^2 + q\phi$ で良いことがわかりました。

つまり、電磁場のある場合には、ハミルトニアンに対して、

・静電ポテンシャル $-q\phi$ を加え

・運動量を $\vec{p} - \dfrac{q}{c}\vec{A}$ のように置き換え

ればよいことになります。

〔余談〕これもスマートにやるには公式 $\vec{P}\times\left(\vec{Q}\times\vec{R}\right) = \left(\vec{P}\cdot\vec{R}\right)\vec{Q} - \left(\vec{P}\cdot\vec{Q}\right)\vec{R}$ を使えば

よいのですが、ちょっと困ることがあります。単純に代入すると

$$\vec{B}\times\vec{v} = -\vec{v}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right) = \left(\vec{v}\cdot\vec{A}\right)\nabla - \left(\vec{v}\cdot\nabla\right)\vec{A}$$

となって、$\vec{A}$ の後ろに ∇ が来てしまいます。

そこで、∇ は後ろ向きであっても $\vec{A}$ のみに作用すると考えます。すると

$$= \vec{v}\cdot\left(\vec{A}\nabla - \nabla\vec{A}\right) = \vec{v}\cdot\left({}^t\left(\nabla\,{}^t\vec{A}\right) - \left(\nabla\,{}^t\vec{A}\right)\right) = \left({}^t\left(\nabla\,{}^t\vec{A}\right) - \left(\nabla\,{}^t\vec{A}\right)\right)\cdot\vec{v}$$

最後のところは $\nabla\vec{A} = \nabla\,{}^t\vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial x} & \frac{\partial A_y}{\partial x} & \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_x}{\partial y} & \frac{\partial A_y}{\partial y} & \frac{\partial A_z}{\partial y} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} & \frac{\partial A_y}{\partial z} & \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{pmatrix}$, $\vec{A}\nabla = \vec{A}\,{}^t\nabla = {}^t\left(\nabla\,{}^t\vec{A}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial x} & \frac{\partial A_x}{\partial y} & \frac{\partial A_x}{\partial z} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} & \frac{\partial A_y}{\partial y} & \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_z}{\partial x} & \frac{\partial A_z}{\partial y} & \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{pmatrix}$

のように考えます。

５練習問題

このハミルトニアンからラグランジアンを $L = H - \sum_i p_i v_i$ を用いて求めよう。

但し三次元なので、$\sum \; = \vec{p}\cdot\vec{v}$ です。

ここで、ハミルトニアンは $\vec{v}$ を含んではいないので、どうやって $\vec{p}\cdot\vec{v}$ を求めるかを考えねばなりません。ルジャンドル変換のレシピを逆さに見て、

正準方程式 $\vec{v} = \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \dfrac{1}{m}\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)$ 　　から $\vec{v}$ を求めます。

６ 磁場と回転座標系

６－１　z 軸に平行な磁場

$\vec{B} = (0,0,B)$ という磁場を与えるようなベクトルポテンシャルは、例えば

$\vec{A} = (-By/2, Bx/2, 0)$ となります。これをランダウゲージと呼びます。

（$\nabla\cdot\vec{A} = 0$ ですから同時にクーロンゲージにもなっています）

ハミルトニアンは、

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - q\vec{A}\right)^2 = \frac{p^2}{2m} - \frac{qB}{m}\left(-p_x y/2 + p_y x/2\right) = \frac{p^2}{2m} + \frac{qB}{2m}\left(xp_y - yp_x\right)$$

です。

６－２磁場が無い場合に回転座標系から見る

話は変わって、磁場も電場もない自由な空間における電荷 $H = \dfrac{p^2}{2m}$ を z 軸の周り

に回転している回転座標系(x', y', z')から見てみるとどうなるでしょうか。

座標変換は、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

ですから、これを件(くだん)のハミルトニアン$H = \dfrac{p^2}{2m}$に代入してみます。具体的には、

座標変数の時間微分を、

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{x}'\cos\omega t - \dot{y}'\sin\omega t - \omega(x'\sin\omega t + y'\cos\omega t) \\ \dot{y} = \dot{x}'\sin\omega t - \dot{y}'\cos\omega t + \omega(x'\cos\omega t - y'\sin\omega t) \end{cases}$$

などのように計算し、$\vec{p} = m\dot{\vec{x}}$に代入するわけです。

周波数が低い場合にはsin/cosを微分した項は小さいので、一次の項までで近似

すると、

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = & (\dot{x}'\cos\omega t - \dot{y}'\sin\omega t)^2 + (\dot{x}'\sin\omega t + \dot{y}'\cos\omega t)^2 \\ & - 2\omega(\dot{x}'\cos\omega t - \dot{y}'\sin\omega t)(x'\sin\omega t + y'\cos\omega t) \\ & + 2\omega(\dot{x}'\sin\omega t + \dot{y}'\cos\omega t)(x'\cos\omega t - y'\sin\omega t) + O(\omega^2) \end{aligned}$$

となり、$\sin^2\omega t + \cos^2\omega t = 1$や正・負項のキャンセルに注意すれば、

$$= \dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 - 2\omega\dot{x}'y' + 2\omega\dot{y}'x' + O(\omega^2)$$ ですから、

$$\therefore \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + 2\omega(x'\dot{y}' - \dot{x}'y')$$

と簡単になります。これを$\dfrac{p^2}{2m} = \dfrac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$に代入して、

$$H = \frac{p'^2}{2m} + \omega(x'p'_y - y'p'_x) + O(\omega^2)$$

が得られます。

これを磁場がある場合のハミルトニアン$=\dfrac{p^2}{2m}+\dfrac{qB}{2}\left(xp_y-yp_x\right)$

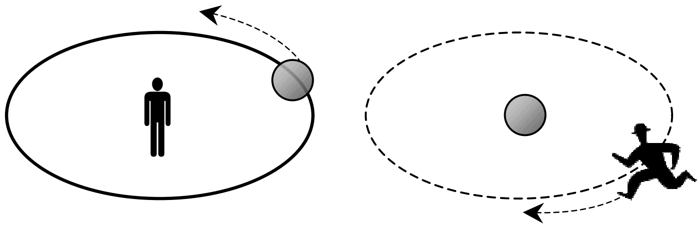
と比べると定数を$\omega=\dfrac{qB}{2}$と置き換えれば何と同じになります。

６－３　ラーモアの定理― 磁場＝回転

ハミルトニアンが同じということは、系の運動も同じ(正準方程式も同じだから)です。よって、

磁場がかかった場合には、「系を回転させたのと大体同じこと」である

という結論になります。これはラーモア（*Larmor*）の定理と呼ばれ、$\omega=eB/2m$はラーモア周波数です。このことを平たく言えば、磁場中では電子はサイクロトロン運動（円運動）をしますから、電子を回す代わりに自分が廻れば同じだ、というわけです。



逆に、自分が廻れば、磁場を打ち消すことが出来るのです。これはすごいことで、MRI や量子コンピュータなど磁気共鳴を使った実験は、スピンにかかる磁場を仮想的に変化させて自由自在にスピンを廻しているのです。もちろん、人間が椅子の上で回るわけではなく、静磁場$\left(0,0,B_0\right)$に加え、方向が回転する磁場$\left(B_1\cos\omega t,B_1\sin\omega t,0\right)$を印加することでスピンが感じる磁場を制御しています。

６－４ ωが大きい場合

ωが小さい場合は完全に一致するのですが、大きい場合は微妙にずれてきます。

一体何が起こるのでしょうか。それがシンクロトロン放射なのです。

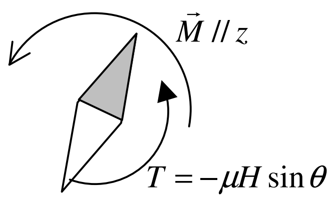
〔補遺１〕磁気共鳴

ラーモアの定理が成り立つもうひとつの例を議論してみましょう。

【準備】北の方角を指して揺れる方位磁石

剛体の運動方程式は、$\vec{T}=\vec{r}\times\vec{f}$ をトルクとすると $\dfrac{\partial\vec{M}}{\partial t}=\vec{T}$ です。ここで、トルクとして力学的に指で回すという場合ではなく、電磁気的なものを考えます。磁気モーメント $\vec{\mu}$ (非常に小さな磁石 $\vec{\mu}=m\vec{d}$)に磁場 $\vec{H}$ を印加した場合には、$\vec{\mu}\times\vec{H}$ のトルクが働きます。何のことはありません。方位磁石が磁場方向を向きたがるということです。$\vec{\mu}$ と $\vec{H}$ が xy 平面にあり角度 θ をなしているとすると、トルクの方向は z 軸方向で大きさは $\mu H\sin\theta$ です。方位磁石と磁場方向が平行なら、トルクはゼロですからその方向で止まっている、というのは小学生も知っていることです。

このように方位磁石の運動は、角運動量 $\vec{M}$ とトルクは共に z 軸に平行で、運動方程式は $\dot{M}_z=I\ddot{\theta}=-\mu H\sin\theta\cong-\mu H\theta$ となります。



【本題】〔磁石自身が自転している場合〕

もし、この磁気モーメントが、それ自身、軸方向に一定の角速度でくるくる廻っていて、角運動量を持っていたとしますと状況は一変します。まず、軸方向にくるくる廻っているのですから、$\gamma\vec{M}=\vec{\mu}$ と書けます。γ は比例定数です。す

ると、運動方程式は$\dot{\vec{\mu}} = \gamma\vec{\mu}\times\vec{H}$となり、$\vec{H} // \vec{z}$の場合は、$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\mu_x\\ \mu_y\\ \mu_z\end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix}\mu_y H_0\\ -\mu_x H_0\\ 0\end{pmatrix}$と

書けます。

これは連立方程式としてμ_yを消去すると簡単に解くことが出来て、

$\ddot{\mu}_x = \gamma\dot{\mu}_y H_0 = \gamma(-\gamma\mu_x H_0)H_0 = -(\gamma H_0)^2\mu_x$

$\ddot{\mu}_y = -\gamma\dot{\mu}_x H_0 = -\gamma(\gamma\mu_y H_0)H_0 = -(\gamma H_0)^2\mu_y$

$\dot{\mu}_z = 0$

ですから、θは積分定数、$\mu_0 = |\vec{\mu}|$, $\omega_0 = \gamma H_0$とおけば、

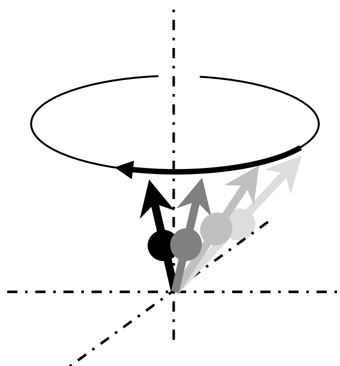
$\mu_x = \mu_0 \sin\theta \sin\omega_0 t$, $\mu_y = \dot{\mu}_x / \gamma H_0 = \mu_0 \sin\theta \cos\omega_0 t$, $\mu_z = \sqrt{\mu_0^2 - \mu_x^2 - \mu_y^2} = \mu_0 \cos\theta$

となって磁場の周りでコマのように歳差運動することがわかります。

この問題でもラーモアの定理が成り立っているでしょうか。これはxy平面内で

$\omega_0 = \gamma H_0$で回転しているという上の解から明らかです。

それでは、ラーモア周波数で逆回転している回転座標系での運動方程式は一体どうなるのでしょうか。止まって見えるはずですから、$\dot{\vec{\mu}} = 0$です。つまり、磁場が消えて見えるわけです。



重力場中におかれたコマも、
磁場中におかれたスピンも
同じように歳差運動をする。
（自転軸方向が廻って行く）

〔角運動量を持つ磁石〕

実は、軸の周りに角運動量を持っているような磁気モーメントはこの世の中に無数にあります。電子や原子核がそうなのです。これらは非常に小さな磁石であると同時に、その磁石の方向に角運動量を持っていることが知られています。さて、この周期$\omega_0 = \gamma H_0$と同じエネルギーを持った電磁波を照射すると、共鳴が起きるというのが、NMR(核磁気共鳴)やESR(電子スピン共鳴)です。これを使うと、物質の中の磁場の大きさを知ることが出来ます。

〔補遺２〕ゲージ変換

なお、マクスウェルの方程式の残りの三つは、

$\nabla \cdot \vec{E} = -\nabla \cdot \nabla \phi - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{A} = -\nabla \cdot \nabla \phi - 0 = -\rho/\varepsilon$　(クーロンゲージ$\nabla \cdot \vec{A} = 0$の場合)

そして、$\nabla \times \vec{B}/\mu = \vec{j} + \varepsilon \dot{\vec{E}}$　及び　$\nabla \cdot \vec{B} = 0$　です。

注) ポテンシャルは、エネルギーの目盛のようなものですから、必ずしも一つに決まっているものではなく、任意性があります。この目盛の付け替えをゲージ変換といいます。静電ポテンシャルだけであれは、単に定数を付けても電場は不変、というふうにわかりやすいのですが、磁場がある場合はどうでしょうか。磁場と電場の両方を不変にする変換は何でしょうか。それは、任意の関数$\chi = \chi(x,t)$について

$A \to A + \nabla\chi$, $\phi \to \phi - \dfrac{\partial\chi}{\partial t}$ と目盛を付け替えてみると、

$$\nabla\times\vec{A}' = \nabla\times\left(\vec{A}+\nabla\chi\right) = \nabla\times\vec{A} + \nabla\times\nabla\chi = \nabla\times\vec{A} + 0 = \vec{B}$$

$$-\nabla\phi' - \frac{\partial\vec{A}'}{\partial t} = -\nabla\left(\phi - \frac{\partial\chi}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{A}+\nabla\chi\right) = -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \vec{E}$$

となってそれぞれ、元の H と E に一致します。

目盛の付け方(≡ χ の選び方)には有名なものがいくつかあって、

1. クーロンゲージ： $\nabla\cdot\vec{A} = 0$
2. ローレンツゲージ： $\nabla\cdot\vec{A} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\phi}{\partial t} = 0$
3. ランダウゲージ： $A = \left(-Hy/2, Hx/2, 0\right)$

と呼ばれています。それぞれ計算が便利になるように使い分けられています。

今の場合は、1 のクーロンゲージを使っています。