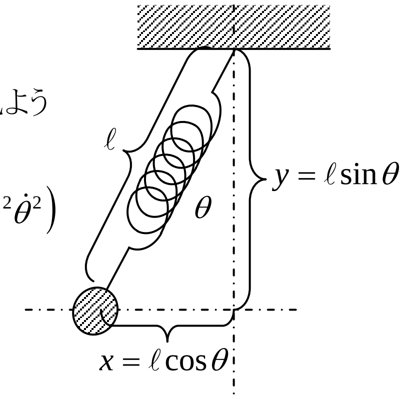
第 5 回 系の対称性と保存量

0 先週の復習

0-1 ラグランジアンに慣れよう

・バネ振り子のラグランジアンを書いて運動方程式を導いて見よう



運動 : $\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)=\frac{m}{2}\left(\frac{d}{dt}(l\cos\theta)\right)^2+\left(\frac{d}{dt}(l\sin\theta)\right)^2=\frac{m}{2}\left(\dot{l}^2+l^2\dot{\theta}^2\right)$

位置 : $mgl(1-\cos\theta)$　　　バネ : $\frac{1}{2}k\left(l-l_0\right)^2$

オイラー・ラグランジュ方程式 : $\frac{\partial L}{\partial\theta}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=0$, $\frac{\partial L}{\partial l}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{l}}=0$: 連立偏微分方程式

0-2 保存則＝系の「対称性」と関係

◆ 時間の一様性

いつ始まった運動も同じ

L が時間を含まないから、$\frac{dL}{dt}(q,\dot{q})=\frac{\partial L}{\partial q}\dot{q}+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\ddot{q}=\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\right)}_{\text{E-L eq.}}\dot{q}+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\ddot{q}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\dot{q}\right)$

$$\therefore const.=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\dot{q}-L$$

※時間を含む場合は $\frac{dL}{dt}(q,\dot{q},t)=\cdots+\frac{\partial L}{\partial t}$ となります。例えば「外力」が働く場合。

◆ 空間の一様性

座標 $\vec{x}$ で起こった運動も $\vec{x}+\vec{a}$ で起こった運動も同じ＝「並進対称性」

$$\delta L=L(\vec{x}+\delta\vec{x})-L(\vec{x})=\sum_a\frac{\partial L}{\partial\vec{x}_a}\delta\vec{x}=\left(\sum_a\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\vec{x}}_a}\right)\delta\vec{x}\longrightarrow\sum_a\frac{\partial L}{\partial\dot{\vec{x}}_a}=const.$$

※ある方向にだけ、ずらしても変わらない場合はその方向の運動量のみ保存。

注）和の記号 $\sum_a\cdots$ は複数の粒子(a で何番目かを表す)を示す

◆ 空間の等方性　　方向に依存しない、、、今日の Goal.

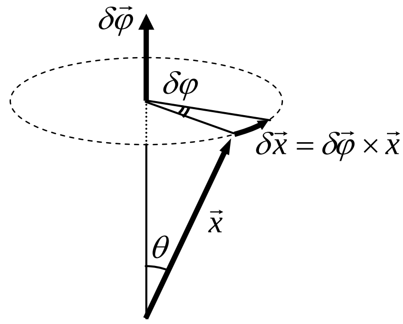
0-3　一般化座標と一般化運動量

デカルト座標以外の座標(角度など)を「一般化座標」、$\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}}$を「一般化運動量」と呼びます

1　微小な回転

これは、空間の回転に対する不変性が存在する場合に保存する量です。

まず、z軸の周りの微小な回転を考えます



回転行列は$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ です（z 座標は不変）

角度が小さい時は$R(\delta\varphi) \approx \begin{pmatrix} 1 & -\delta\varphi & 0 \\ \delta\varphi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ と近似されます。

図形的に外積になっているか？
1. $\delta\vec{x}$ の方向は、$\delta\vec{\varphi}$，$\vec{x}$ のどちらにも垂直
2. $|\delta\vec{x}|$ の長さは、$|\delta\varphi|\sqrt{x^2+y^2}$ $= \sin\theta \cdot |\vec{x}|$

座標 $\vec{x}$ は $R(\delta\varphi)\vec{x} = \begin{pmatrix} x - \delta\varphi \cdot y \\ \delta\varphi \cdot x + y \\ z \end{pmatrix}$ に変換されるので、変化分は

$$\delta\vec{x} = R(\delta\varphi)\vec{x} - \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\delta\varphi \cdot y \\ \delta\varphi \cdot x \\ 0 \end{pmatrix} = (0,0,\delta\varphi) \times (x,y,z)}_{\text{と書けるので無理矢理そう書いてしまう}} \equiv \delta\vec{\varphi} \times \vec{x} \quad \text{—— (i)}$$

と外積で現されます。

注）一旦、ベクトルで書くことが出来ると、これは座標軸の取り方によらないので

任意の方向の回転軸に適用できるはずです。

このベクトル $(0,0,\delta\varphi)$ を回転ベクトルと呼びます。絶対値は回転角で方向は回転軸です。

速度の変化はδxを時間微分して$\delta\dot{\vec{x}} = \delta\vec{\varphi} \times \dot{\vec{x}}$ です。——(ii)

2 回転の前後での L の変化

座標を回転させたラグランジアンは $L\left(\vec{x}+\delta\vec{x},\ \dot{\vec{x}}+\delta\dot{\vec{x}}\right)$ ですから、差を取って

$$\delta L = L(\vec{x}+\delta\vec{x},\dot{\vec{x}}+\delta\dot{\vec{x}}) - L(\vec{x},\dot{\vec{x}}\cdots) = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{x}_a}\delta\vec{x}_a + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_a}\delta\dot{\vec{x}}_a = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{x}_a}\cdot\left(\delta\vec{\varphi}\times\vec{x}_a\right)+\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_a}\cdot\left(\delta\vec{\varphi}\times\dot{\vec{x}}_a\right)$$

ここで前回やった一般化運動量の定義 $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_a} = \vec{p}_a$ を思い出して、

注）一般化運動量― 微少並進 δx に対して $\delta L = 0$ の場合に保存される量

・1 項目は、E.-L.方程式より、$\dfrac{\partial L}{\partial \vec{x}_a} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_a} = \dfrac{d}{dt}\vec{p}_a = \dot{\vec{p}}_a$

・2 項目は、定義そのもので、$\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_a} = \vec{p}_a$ ですから、

$\delta L = \sum_a \dot{\vec{p}}_a\cdot(\delta\vec{\varphi}\times\vec{x}_a)+\vec{p}_a\cdot(\delta\vec{\varphi}\times\dot{\vec{x}}_a)$ を得ます。

ここでベクトル解析から、$A\cdot(B\times C) = B\cdot(C\times A)$ の循環置換公式を思い出して、

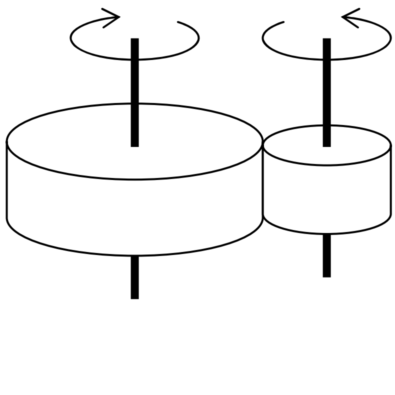
$\delta\vec{\theta}$ を前に括りだして、

$$\delta L = \delta\vec{\varphi}\cdot\sum_a(\vec{x}_a\times\dot{\vec{p}}_a)+(\dot{\vec{x}}_a\times\vec{p}_a) = \delta\vec{\varphi}\cdot\frac{d}{dt}\sum_a(\vec{x}_a\times\vec{p}_a)$$

となります。座標の回転に対して対称な系では、

任意の $\delta\vec{\varphi}$ 回転で L の変化がゼロになりますから、$\sum_a \vec{x}_a\times\vec{p}_a = \vec{M}$

が保存する必要があります。これが全角運動量です。



3 角運動量についての注意

3-1 保存しない例

軸が固定された二つの円盤が擦れ合うような問題

⇒ ある一つの軸の周りに対称でないからです

3-2 座標軸の取り方によって$\vec{M} = \sum_a \vec{x}_a \times \vec{p}_a$ の値が変わる？

保存量に$\vec{x}$が入っているので確かに変わります。しかし *no* problem です。

実際、$\vec{x} \to \vec{x} + \vec{a}$ という座標変換に対して、$\vec{M} \to \vec{M} + \vec{a} \times \vec{P}$ と変化するのですが、運動量も

保存量ですから、座標変換した後の$\vec{M}$も保存量です。

しかし値は異なるので、角運動量と言うときは、「どの点の周りの角運動量」と言うようにします。

3-3 ある軸のまわりにだけ対称な場合

ある方向の$\delta\vec{\varphi}$についてのみ $0 = \delta\vec{\varphi} \cdot \frac{d}{dt}\sum_a (\vec{x}_a \times \vec{p}_a)$ という条件ですから、

その$\delta\vec{\varphi}$に平行な成分がゼロにならねばなりません。

よって、ある方向の成分$M_{\vec{\varphi}}$だけが保存します。

例）z 軸周りが対称的なら、$M_z = \sum_a (\vec{x}_a \times \vec{p}_a)_z$ のみが保存。

【注意】一瞬、内積がゼロだから直交方向、と言ってしまいがち。

4 保存量の一般論

ここまで、$t, \vec{x}, \vec{\varphi}$ と言う変数をずらして保存量を見つけて来ました。

これを一般化できないでしょうか。つまり、

一般化座標についての$q_i \to q_i + \delta q_i$ という変換をしてみます。

ここで$\delta q = \delta q(q,t)$ はとりあえず時間や座標に依存している、とします

すると、$\delta L = L(q+\delta q, \dot{q}+\delta\dot{q}) - L(q,\dot{q}) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i$

第二項を$A\dot{B} = \frac{d}{dt}(AB) - \dot{A}B$ を使って変換すると、

$$=\sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i$$

となるので、第一項と第三項をまとめて、第二項を後ろに押し出します。

$$=\sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right]\delta q_i + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right)$$

すると、驚くことに E.-L.方程式から、第一項は消えてしまいます。結局、

$$=\sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right) = 0$$

を得ます。これを時間積分すれば、

$\therefore \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i(q,t) = const.$ が得られ、

これをネーターの定理（Emmy Noether, 独, ゲッチンゲン大 1882-1935）と言われます。

もちろん、変換 $\delta q = \delta q(q,t)$ が定数であれば、単純に $\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = const$.となります。

これは、なにか系を δq だけずらしても L が不変であれば $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ が保存するということです。

[系の対称性] ——→ [保存量]

$q = x$ で運動量、$q = \theta$ で角運動量、時間でエネルギー…

（E だけは導出が少し異なる…）

5 角運動量とネーターの定理

三次元の極座標で z 軸の周りの回転変換 $\varphi \to \varphi + \delta\varphi$ を考えましょう。

- $\delta\varphi = const.$ としてネッターの定理を適用すれば、$\sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_a} = const.$ となります。

- 我々は既に z 軸周りの回転 $\delta\varphi$ で L 不変の場合、M_z が保存されることを知っています

両者は同じものらしいですから、$M_z = \sum_a \left(\vec{r}_a \times \vec{p}_a\right)_z$ は、$\sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_a}$ と書けるはずです。

実際に極座標を使って確かめてみましょう。

$$L = \sum \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}_a^2 - V\left(\vec{r}_a\right) = \sum \frac{m}{2}\left(\dot{r}_a^2 + r_a^2\dot{\theta}_a^2 + r_a^2\dot{\varphi}_a^2\sin^2\theta_a\right) - V\left(\vec{r}_a\right) \text{ですから、}$$

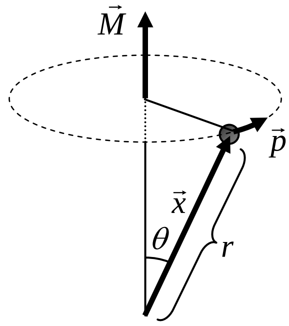
注）$\left|\dot{\vec{r}}\right|^2 = \underbrace{\dot{x}^2}_{x=r\sin\theta\cos\varphi} + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \left(\dot{r}\sin\theta\cos\varphi + r\cos\theta\cos\varphi\cdot\dot{\theta} - r\cos\theta\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}\right)^2 + \cdots$

この L を単純に微分して、

注）$V\left(\vec{r}_a\right)$ は $\vec{r}_a$ の関数なので φ_a を含むが、しかし $\dot{\varphi}_a$ は含まない。

$$\sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_a} = \sum_a m r_a^2 \dot{\varphi}_a \sin^2\theta_a = \sum_a m\left(r_a \sin\theta_a\right)^2 \dot{\varphi}_a = \sum_a r_a \sin\theta_a\left(m r_a \sin\theta_a \dot{\varphi}_a\right)$$

$$= \sum_a r_a \sin\theta_a\, p_a = \sum_a \left(\vec{x}_\perp \times \vec{p}\right) = \sum_a \left(\vec{x} \times \vec{p}\right)_z$$



と確かに M_z になります。

6 空間反転

6-1 空間反転と鏡像

鏡に映った像と空間反転は似ていますが、ちょっと異なります。

空間反転は $\vec{x} \to -\vec{x}$ で、すべての座標(x,y,z)の符号を反転します。

鏡像は、特定の座標だけを反転します。

6-2 空間反転と速度、運動量

$\vec{x} \to -\vec{x}$ ですから、当然、$\vec{\upsilon} \to -\vec{\upsilon}$ で速度ベクトルは反転します。

くどいようですが当然、運動量ベクトルも反転します。

6-3 空間反転と角運動量

回転運動はどうでしょうか？一見、反転しそうですが、、、角運動量の定義を思い出すと、

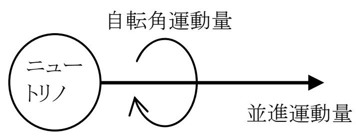
$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$ ですから、$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} \xrightarrow{\text{空間反転}} (-\vec{r}) \times (-\vec{p})$ となって、もとに戻ります。

驚いたことに、回転運動は、座標を反転しても同じ向きの回転なのです。

6-4 【余談】空間反転とネジ

ネジや、植物のつるの右巻き・左巻きはどうでしょうか。これは回転に加えて、回転軸方向へ進む運動を含んでいますから、空間反転で符号反転して別物になります。右ネジと左ネジは全く別物です。

6-5 ニュートリノとパイ中間子



6-5-1 ニュートリノ

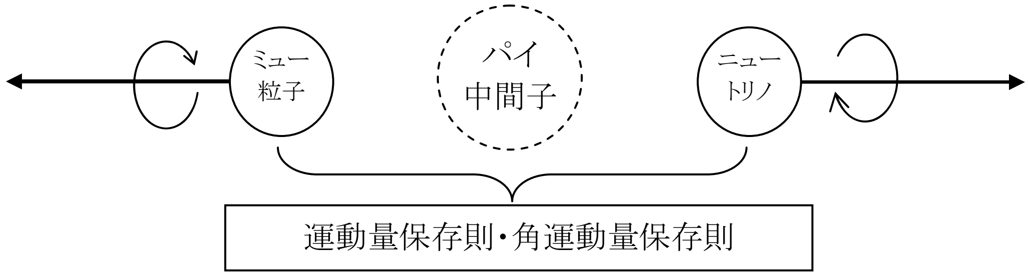
これは電荷はゼロで、質量もわずか（電子の数十万分の一で、かつ、時間とともに質量が振動すると言われている）ですが、大きな運動量（速度は殆ど光速）と運動エネルギーを持つ粒子です。中性子が「陽子＋電子」へと崩壊するときにニュートリノが発生しますが、この粒子が発見される前は「中性子の崩壊ではエネルギー保存則が破れる」と思われていた時期さえありました。

右図のように、コマのように自転している性質を持っていて、自転の方向は、運動量に対して常に「左巻き」です。

6-5-2 パイ中間子は、原子核の中で陽子と陽子をくっつける働きをします。

これは自転していません（自転の角運動量＝0です）。パイ中間子を核の外へ取り出すと、あ

っという間に崩壊して、ニュートリノとミュー粒子の二つになってしまいます。



ミュー粒子の運動量と角運動量は、保存則によって、ニュートリノの運動量と角運動量と、絶対値は同じで符号が逆です。ミュー粒子の自転の方向は運動量に対して「左巻き」になります。

6-6 空間反転とパイ中間子の崩壊

上の図で空間反転させてみましょう。角運動量は不変なのですから、

となります。ミュー粒子の自転の方向は運動量に対して「右巻き」になります。しかし、実験を行ってみると、出てくるミュー粒子は全て「左巻き」なのです。鏡に映った世界（正確には空間反転させた世界）は実現しないのです。

この事実が発見された当初は「神様は左利きだった！？」とさえ言われていました。これは自然界の対称性の破れの一つです。

数年前までは、電荷の符号も同時に入れ替えると対称的になると言われていましたが、最近、時間の進みも反対にしてやらないとダメなことが小林・益川の両先生によって明らかになり、ノーベル賞へと繋がったというわけです。