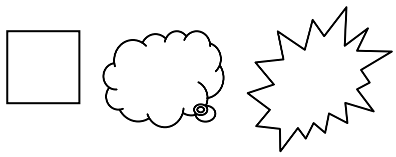
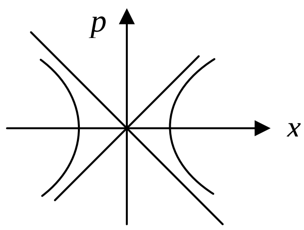
第 14 回　　　作用変数・断熱不変量　　　2010, 7/21, 0915-1145, 3-348

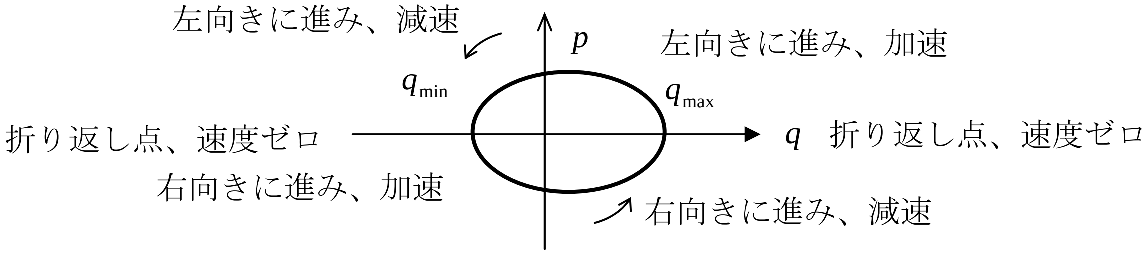
前回、位相空間で、運動の軌跡は、特異点以外では交わらない、ということをお話しました。それでは、特異点とは、いったいどのような点なのでしょうか。一般に、(p,q)の一点を与えればその後の運動は、全て決まってしまうのですから、それにもかかわらず、軌跡が交わるということは、その後の運動が一意に決まらない、という状況に対応します。ですから、たとえば、質点が、山の頂上でちょうど、停止してしまう、というような運動の場合、軌跡が交差します。この場合、原点で交差します。頂上で、止まってしまったら、その後、どちらに行くかわからない(右図の交差直線)というわけです。





このような特異点以外では、軌跡は交わりません。そして、この軌跡から、少しずれた運動を考えると、そのずれ$dq \cdot dp$は保存する、というのがリウビルの定理でした(左図)。保存が保証されるのは面積だけですから、初期のずれが矩形であっても、運動の時間発展とともに、その形が崩れて、蜘蛛の巣状に広がってしまい、面積は保存していても、さしわたし半径は大きくなっていることもありえます。「カオス」とは、このような状態になっていて、初期状態に無限小のずれを与えても、しばらくたつと、ずれ幅は有限値をとるのです。

これまで系の対称性によって、エネルギー(時間の一様性)や運動量(空間の一様性)、角運動量(空間の等方性)などが保存されることを学んできました。今回は周期運動をする系について、もうひとつの保存される量のお話です。周期運動と言えば、調和振動子とか、ケプラー問題とか、原子核の周りを回っている電子とか、箱の中を往復する粒子とかです。位相空間内の軌跡は、



のように閉曲線になっているものです。念のため、これは一次元の往復運動です。二次元平面内の回転ではありません。

この系において、「作用変数」という量を$J=\oint pdq$で定義します(なお、定義に$1/2\pi$が付いている場合もあります)。ちなみに作用積分とは全く別の量です。pはqに対して共役な運動量=$\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}}$です。積分の○は、1 周期分について積分するという意味です。もう少し丁寧に言えば、

$$J=\int_{q_{\min}}^{q_{\max}} p_{\text{行き}}dq+\int_{q_{\min}}^{q_{\max}} p_{\text{帰り}}dq$$

ということです。この定義から明らかなように、位相空間での軌跡が 1 周期の間に囲む面積です。この J が、系のパラメタ(例えば、振り子の長さとか、壁の位置とか、バネ定数)をゆっくりと変えたときにも一定になっている、という

のが今日のお話です。具体例を示すと、

1. 糸の先につけられた質点

糸の先につけられた質点が円運動している場合を考えましょう。質点の位置を極座標θで表すと、ラグランジアンは、$L=\dfrac{m\upsilon^2}{2}=\dfrac{mr^2\dot{\theta}^2}{2}$で、共役運動量は$p_\theta=\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta}$です。運動方程式は、$\theta$が循環座標ですから$\dfrac{\partial L}{\partial\theta}=0$となり、$\ddot{\theta}=0$と良く知っている結果が得られます。$\dot{\theta}=const.$なので、これを$\equiv\omega$と書きます。

作用変数は、

$$J=\oint mr^2\dot{\theta}\,d\theta=2\pi mr^2\dot{\theta}\equiv 2\pi\, m r^2\omega$$

となります。ここで、中心から糸をゆっくりと引っ張って短くしたらどうなるでしょうか。この場合は、糸の長さがパラメタというわけです。Jが保存していることを以下に示しましょう。

糸の張力は遠心力と等しいですから、$f=mr\omega^2=\dfrac{m\upsilon^2}{r}$で、これを$dr$だけ内側へ引っ張ると、$f\cdot(-dr)=-\dfrac{mv^2dr}{r}$の仕事をすることになります($r$の符号は外側へ向かう方を正に取っています)。この仕事は全エネルギーの保存則から、質点の運動エネルギーの増加と一致するはずですから、

$$-\frac{mv^2}{r}dr=dE_{\mathrm{kin}}=d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=mvdv$$

$$\therefore\frac{dv}{v}=-\frac{dr}{r}$$ (これは$\dfrac{d\upsilon}{dr}=-\dfrac{\upsilon}{r}$と同じ。一階なので変数分離で必ず解ける)

積分して、$\log v=-\log r+C$ より、

$$\therefore \quad vr = \text{定数}$$

という関係が得られます。糸が短くなると速度がだんだん大きくなるわけです。角速度も、$\omega = \dfrac{v}{r} = \dfrac{C}{r^2}$と、大きくなります。

これを先ほどの作用変数と比べてみましょう。

$J = 2\pi m r^2 \omega = 2\pi m \cdot rv =$ 一定　となり、たとえ運動エネルギーは変わっても、Jは保存されていることがわかります。このように何かを「ゆっくりと」変化させても作用変数は変化しません。これを「断熱不変量」と言います。

「断熱」という言葉は熱力学を連想させますが、どうしてそんな単語が力学に出てくるのかは、後の例で明らかになります。

2. 断熱不変量

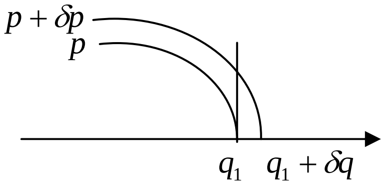
今の場合は糸の長さでしたが、もっと一般的に系のパラメタをゆっくりと変えたときの保存量は、一般的にどうなるのでしょうか。ゆっくりと、というのは、1 周期の間の変化の割合が小さい、ということです。つまり、

$$\delta a = T \cdot \frac{da}{dt} \ll \alpha$$

が条件です。そうでないと、先ほどの例で言えば、1 回転する前に長さが変わってしまうのですから、そもそも円運動にならないわけです。

さて、パラメタaが$a+\delta a$に変化した時の作用変数のずれを見てみましょう。振動の折り返し点の座標をq_1, q_2とすると、$J = \oint p\,dq = \int_{q_1}^{q_2} p_+ dq + \int_{q_2}^{q_1} p_- dq$ですから、

このうち、行きの方だけを考えて、$a \mapsto a+\delta a$ とずらしたときの微分(変化分)を



取ると積分範囲のずれも含めて、

$$\delta J=\int_{q_1}^{q_2}\delta p\cdot dq+p\cdot\delta q\Big|_{q=q_2}-p\cdot\delta q\Big|_{q=q_1}$$

となりますが、折り返し点では p=0 ですから、範囲のずれの項は無視してよいことになります。ここで $p^2=2m\left(E-V(q,a)\right)$ なので、a の変化について着目すると、$p=p\left(E(a),a\right)$ ですから、

積分の中身$=\delta p=\dfrac{\partial p}{\partial E}\delta E+\dfrac{\partial p}{\partial a}\delta a$ となります。

第一項に $p^2=2m\left(E-V(q,a)\right)$ を E で微分した $2p\dfrac{\partial p}{\partial E}=2m$ 、及び $p=mv=m\dfrac{dq}{dt}$ を代入すると、

$\dfrac{\partial p}{\partial E}\delta E\cdot dq=\dfrac{m}{p}\delta E\dfrac{p}{m}\cdot dt=\delta Edt$ です。ここで繰り返しますが、δ はパラメタの微小ずれによる変化分を表わします。

第二項は、同じく $p^2=2m\left(E-V(q,a)\right)$ を a で微分した $2p\dfrac{\partial p}{\partial a}=-2m\dfrac{\partial V}{\partial a}$ を使うと、

$$\frac{\partial p}{\partial a}\delta adq=-\frac{m}{p}\frac{\partial V}{\partial a}\delta a\frac{pdt}{m}=\frac{\partial V}{\partial a}\delta adt$$

となるので、結局、積分変数も t に変わり、積分範囲も折り返し点までの時間となって、結局、

$$\delta J=\int_0^t\left(\delta E-\frac{\partial V}{\partial a}\delta a\right)dt$$

となります。ここで $E=\dfrac{p^2}{2m}+V(q,a)$ ですから、パラメタ a が変わると、エネ

ルギーは、$\delta E = \dfrac{\partial V}{\partial a}\delta a$ のように変化するので、積分の中身はゼロになります。

3. 中心力ポテンシャル

糸でなくとも、中心力のポテンシャル$V(r)$の中で、質点が円運動をしている場合でも全く同じです。

その前に、この系の位相空間での軌跡はどうなるでしょうか。座標をθととると、共役運動量は$\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$ですから、回転速度が一定であれば、$p_\theta =$一定で、これは水平な直線(線分)です。

作用変数は簡単に、$J = \oint p dq = \oint mr^2\dot{\theta}d\theta = mr^2\dot{\theta}\oint d\theta = mr^2\omega \cdot 2\pi$ です。遠心力は$f = mr\omega^2$で、ポテンシャルによる力に対して逆向きに釣り合っているのですから、$-\left(-\dfrac{dV}{dr}\right) = f$の関係が成り立っています。すると、円運動をしつづける間は、$V = \int_0^r f dr = \int_0^r mr\omega^2 dr = \dfrac{mr^2\omega^2}{2}$のポテンシャルエネルギーを持っていることになります。運動エネルギーも$E_{\mathrm{kin}} = \dfrac{mr^2\omega^2}{2}$ですから、全エネルギーは、$E = mr^2\omega^2$となり、角変数との関係は、

$$J = 2\pi \cdot mr^2\omega = 2\pi \cdot \frac{E}{\omega}$$

となります。

Jの次元は、

$$J \propto m(r\omega)r \propto mv \cdot r \propto p \cdot r$$

ですから、角運動量の次元です。この二つの事は一般的に成り立ちます。

量子力学では、この J が水素原子のスペクトルの実験結果から、飛び飛びの値 $J = nh$ を取るだろう、という予想が出発点になりました。どうしてこの予想が出来たかと言うと、直感的に見て、飛び飛びの値を取る量は、なかなか変化しにくいものですから、もし、量子化されるとしたら、断熱不変量であろう、考えたわけです。

なお、円運動でない場合は、極座標及びそれぞれの共役運動量を用いて、

$J_r = \oint p_r dr,\ J_\theta = \oint p_\theta d\theta,\ J_\varphi = \oint p_\varphi d\varphi$ というふうに、作用変数を定義します。この場合の量子化条件は、$J_r + J_\theta + J_\varphi = nh$ です。

4. 壁の間の往復運動、断熱の意味

もうひとつ、全く違う周期運動を考えましょう。壁に挟まれた質点が行ったり来たりする場合です。作用変数は往復で $J = p \cdot l + (-p) \cdot (-l) = 2p \cdot l$ です。これが保存するとして、壁の間隔を、ゆっくりと狭めて行ったときどうなるか考えましょう。J が一定だとすれば、p は増えていくはずです。本当でしょうか。実際、壁の速度を u とすれば、粒子は壁に衝突する度に、$2u$ だけ速度が増加します。粒子を気体分子と考えると、速度が上がるということは、温度が高くなるということですから、これは「断熱圧縮」です。

知っていると思いますが、この断熱圧縮で温度が上がるためには、二つの条件が必要です。というより、「断熱」には二つの意味があるのです。一つは、粒子に仕事をさせなければなりませんから、何回も衝突するように、壁をゆっくりと動かすということ。もう一つは、発生した熱が他所に逃げてしまわないように、ある程度速く壁を動かさなければならない(日本語の意味としてはこちらのみが強調されています)、ということで、結局、二つの条件がついてきます。もちろん、純粋な力学の問題では、「熱が逃げる」と云った散逸過程は、対象外ですから、前者の条件のみが考慮されます。

5. 調和振動子

最後に、調和振動子では、$H=\dfrac{p^2}{2m}+\dfrac{m\omega_0^2q^2}{2}$ ですから、作用積分は、

$$J=2\int\sqrt{2m\left(E-m\omega_0^2q^2/2\right)}dq$$

となり、積分範囲は $-q_{\max}\sim+q_{\max}$ ですが1周期は行き帰りで2倍になります。簡単に結果を得るために先に解を求めておくと、

$$q=A\sin\omega_0 t,\ p=mA\omega_0\cos\omega_0 t,\ E=m\omega_0^2A^2/2$$

ですから、

$$J=2\int\sqrt{m\left(m\omega_0^2A^2-m\omega_0^2A^2\sin^2\omega_0 t\right)}dq=2\int m\omega_0 A\cos\omega_0 t\cdot d\left(A\sin\omega_0 t\right)$$

$$=2m\omega_0^2A^2\int\cos^2\omega_0 t\cdot dt=2m\omega_0^2A^2\cdot\frac{\pi}{2\omega_0}=2\pi\cdot\frac{m\omega_0A^2}{2}=2\pi\cdot\frac{E}{\omega_0}$$

という関係が得られます。例えば、振り子は、振幅が小さいときは振動数

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$ の単振動ですから、長さをゆっくり変えて行くと、振幅は

$$A \propto \sqrt{E} = \sqrt{\frac{J\omega_0}{2\pi}} \propto \sqrt{\omega_0} = \sqrt{\sqrt{\frac{g}{\ell}}} \propto \frac{1}{\ell^{1/4}}$$ で変化することがわかります。

空間を電場と磁場の波が伝わる電磁波は、「空間の場」を調和振動子と見立てる考え方があります。すると、断熱不変量は、$J = 2\pi\dfrac{E}{\omega}$ なのですから、これが一定値を取るだろうとして、$\hbar$ と書くと、アインシュタインの光量子仮説 $\dfrac{E}{\nu} = h$ が得られます。

解析力学試験 ’98 前期

7月17日	11:00-12:30	於 講義室 9-349

試験問題

1. ラグランジアンとハミルトニアン、共役運動量、位相空間

2. 最少作用の原理と、パラメタの偏微分による変分法

3. 適当な正準変換を探し、さらにその母関数を求める。

4. ポアソンの括弧式

5. 実際の運動におけるリウビルの定理

6. 剛体の運動とラーモアの定理

以上から 5 問出題します。

後藤 (371 号室, gotoo-t@hoffman.cc.sophia.ac.jp)