解析力学試験問題'98　7月17日　11:00-12:30　於 講義室 9-349 後藤

問 1

質量 m **の自由な質点の運動で、最少作用の原理が満たされていることを確かめよう。質点の運動を** $x = vt^n$ **と仮定して**(v **は定数**)**、作用積分** $S = \int_0^1 L dt$ **が、現実の運動に対して極小値を取ることを証明せよ。**

ヒント — 現実の運動は、もちろん、 $x = vt$ **である。**

問 2

次のハミルトニアンを正準変換によって簡単な形に直し、どのような運動であるかを述べよ(q, a **は定数**)**。さらに、使用した正準変換の母関数** $W = W(q, Q)$ **を求めよ。** $H = \cos^2 q \cdot p^2 + \sin^2 q \cdot q^2 - 2\cos q \sin q \cdot p \cdot q + a(\cos q \cdot x + \sin q \cdot p)$

ヒント — 求める正準変換はパラメタとして q **を含むが、** a **は含まない。また、母関数と正準変換** $(p, q) \to (P, Q)$ **の関係は、** $p = \frac{\partial W}{\partial q}$, $P = -\frac{\partial W}{\partial Q}$ **である。**

問 3

角運動量 $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$ **について、** $l_\pm \equiv l_x \pm i l_y$ **と** l_z **のポワッソンの括弧式を計算せよ** (i **は虚数単位**)**。**

ヒント — $l_x = yp_z - zp_y$, $l_y = zp_x - xp_z$, $l_z = xp_y - yp_x$

問 4

長さℓの軽い棒の先端に質量mの質点がついた振り子について、振れ角をqとしてラグランジアンを書き、qに対する共役運動量p_qを求めよ(重力加速度をgとする)。次に、定義$H=\sum_i p_i\dot{q}_i - L$に従ってハミルトニアンを導出し、エネルギーが、$E<2mgl$, $E=2mgl$, $E>2mgl$のそれぞれの場合について、(q, p_q)の位相空間での軌跡を図に描け。なお、$E=2mgl$の場合は軌跡が交差しているが、交差点で何が起こるか簡潔に述べよ。

注意 —— 振り子の振幅が小さいという近似は使わないものとする。

問 5

角運動量$\vec{M}$及び磁気モーメント$\vec{m}$を持つコマの磁場$(0,0,H)$中での運動を調べよ。但し、常に$\vec{M}$と$\vec{m}$は平行で、大きさは$m=gM$であるとする (gは比例定数)。また、解の形から、この系でも一種のラーモアの定理(但し、$w=gH$)が成り立っていることを説明せよ。

ヒント — コマに働くトルク$\vec{T}$は$\vec{m}\times\vec{H}$、剛体の運動方程式は$\dfrac{d\vec{M}}{dt}=\vec{T}$である。

*コメントなどありましたらどうぞ。

解析力学試験問題'98, 担当—後藤(gotoo-t@hoffman.cc.sophia.ac.jp)