【レポート】

1．以下のポテンシャルのナブラ(nabla)を計算し、xy 平面に力 $\vec{f} = -\nabla U$ の方向矢印で表してみよう。

例）$U(x,y) = \frac{1}{2}k(x^2+y^2)$:全方向へのびるバネ

$-\nabla U = \left(-\frac{\partial}{\partial x}U, -\frac{\partial}{\partial y}U\right) = \left(\frac{1}{2}k(2x), \frac{1}{2}k(2y)\right) = (-kx, -ky)$ なので、

すぐに、$-\nabla U(0,0) = \vec{0}$，$-\nabla U(1,1) = (-k, -k)$ とわかります。

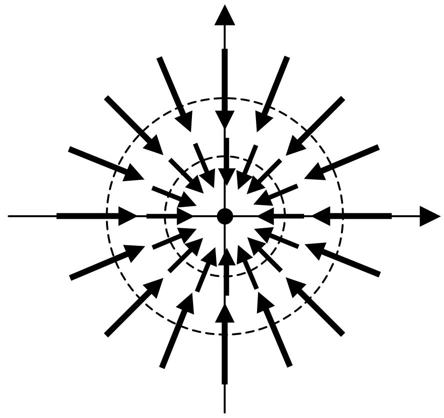
これを xy 面に矢印で書き込めば良いです。

k の値は矢印が描きやすいような適当な長さにします。

あと、

$|-\nabla U| = \sqrt{(-kx)^2 + (-ky)^2} = k\sqrt{x^2+y^2}$

なので、円周上では矢印の長さ $|-\nabla U|$ が等しいことがわかります。



【例題】$U(x,y) = a$　:水平な平面　　　$U(x,y) = ax$　:x 軸方向に傾斜した平面

$U(x,y) = \dfrac{-a}{\sqrt{x^2+y^2}}$　:深さが∞の穴（＝重力ポテンシャル）

$U(x,y) = a\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{b^2}\right)$:山の形　　$U(x,y) = a\sin(x/b)$　:y 軸に平行に波打った波板(なみいた)

$U(x,y) = xy$

※図示が出来なくともとりあえず $\vec{f} = -\nabla U$ は計算してみましょう。

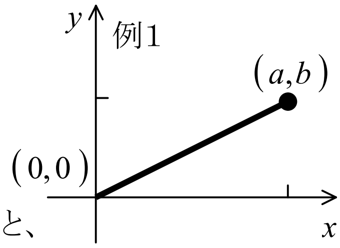
2．線積分に慣れよう

まず、経路上の点を $0 \sim 1$ まで変化する変数 t を使って表しましょう。

例1）右図の場合、太線上の点は $\vec{x} = (ta, tb)$ です。$t = 0 \sim 1$ まで変化すると、

確かに (ta, tb) は $(0,0)$ から (a,b) まで動きます。

積分変数の変換 $\vec{x} \to t$ は、$d\vec{x} = d(ta, tb) = d(t(a, b)) = (a, b)dt$　です。



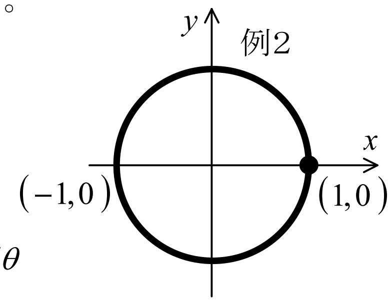
例2）ヒント: 半径1の円周上の点は $\vec{x} = (\cos\theta, \sin\theta)$ と表されます。

一周分ですから、$\theta = 0 \sim 2\pi$ まで動きます。$t = 0 \sim 1$ ですから、

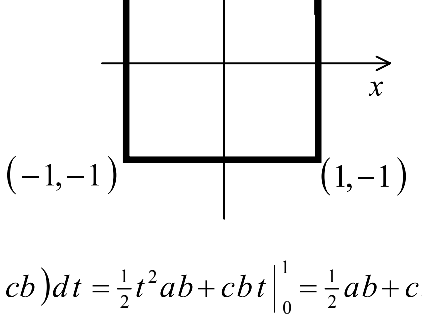
$\theta = 2\pi t$　です。これを $(\cos\theta, \sin\theta)$ に代入すれば OK です。

積分変数の変換 $\vec{x} \to \theta$ は、$d\vec{x} = d(\cos\theta, \sin\theta) = (d\cos\theta, d\sin\theta)$

$= (d\theta(-\sin\theta), d\theta(\cos\theta)) = (-\sin\theta, \cos\theta)d\theta$



例3）ヒント: 四つの辺にわけて考えます。どこから出発しても OK です。それぞれの辺は線分なのでやり方はわかっています（例1）から、それらを足せば良いわけです。



次にこの結果を使って積分を実行して見ます。被積分関数は、

$\vec{f}(\vec{x}) = (y, c)$（ポテンシャルから導かれる力ではないです）

$\vec{g}(\vec{x}) = (-kx, -ky)$（ばねの力なので、ポテンシャル力です）

とします。これらを経路の例1～例3の経路で線積分して見ましょう。

ヒント: 例1の経路で $\vec{f}$ を線積分してみると、、、

$$\int_{\text{例1の経路}} \vec{f}(x,y)\cdot d\vec{x} = \int_0^1 \underbrace{\vec{f}(x,y)}_{x=ta,\, y=tb}\cdot d(ta,tb) = \int_0^1 (tb, c)\cdot(a,b)dt = \int_0^1 (tab+cb)dt = \frac{1}{2}t^2ab + cbt\Big|_0^1 = \frac{1}{2}ab + cb$$

となります。例2、例3では一周する経路ですから、保存力 $\vec{g}$ についてはゼロになるはずです。