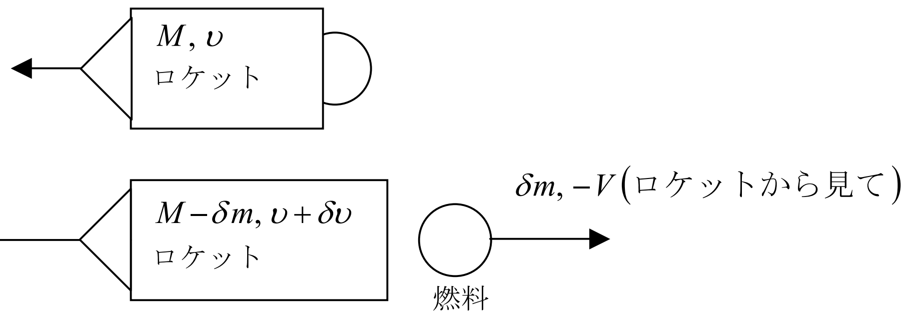
後藤貴行 3-335B, 03-3238-3356, gotoo-t@sophia.ac.jp

ロケットとびっくりボール—運動方程式と保存則の使い方に慣れる。

1 ロケット

1-1 問題の設定

左向き進行方向を正にとり、ロケットの質量をMとする。
微小時間δtの間に、燃料をδmだけ、
速度V
（ロケットから見た速度）
で後方に噴射したとする。



1-2 運動量保存則

静止座標系から見た噴射燃料の速度は$-V+\upsilon$
運動量保存則より、

噴射前（ロケット）　噴射後（ロケットと燃料）

$$M\upsilon = (M-\delta m)(\upsilon+\delta\upsilon)+(-V+\upsilon)\delta m$$

$$\text{右辺} = M(\upsilon+\delta\upsilon)-\upsilon\delta m-\underbrace{\delta m\,\delta\upsilon}_{\text{微少量}}+\upsilon\delta m-V\delta m$$

$$= M(\upsilon+\delta\upsilon)\underbrace{-\upsilon\delta m+\upsilon\delta m}_{\text{キャンセル}}-V\delta m = M(\upsilon+\delta\upsilon)-V\delta m$$

噴射時間δtが短いので、噴射量δmも小さい。よって、速度の変化$\delta\upsilon$も小さい。
$\delta m\,\delta\upsilon$は微少量同士の積なので、積になっていない他の項よりずっと小さく、無視できる。

$$\therefore 0 = M\delta\upsilon - V\delta m$$

ここで、単位時間あたり（一秒あたり）の噴射量をρとすると、$\delta m = \rho\delta t$と書けるので、
$M\delta\upsilon = V\rho\delta t$となって、

$$\lim_{\delta t\to 0} M\frac{\delta\upsilon}{\delta t} = M\frac{d\upsilon}{dt} = V\rho \quad \text{— ロケット方程式}$$

を得る。

1-3 ロケットの質量変化

ロケット方程式は一見単純そうだが、Mは時間に依存した変数なので、トリビアルではない。

噴射量は一定なので、発射からt秒後にはロケット質量は$M = M_0 - \rho t$となっている。

注）M_0はロケットの初期質量で定数。

注）噴射量がロケット重量に対して一定の「割合」という仮定だと結果は違ってくる。

この M の式をロケット方程式に代入すると、$\left(M_0-\rho t\right)\dfrac{d\upsilon}{dt}=V\rho$

となるので、あとはこれを解くだけ — 算数の問題に帰着(きちゃく)した。

1-4 一階微分方程式

$\left(M_0-\rho t\right)\dfrac{d\upsilon}{dt}=V\rho$ には一階微分しか含まれていないので確実に解ける。

注）変数は $\upsilon(t)$ です。x と y とで判りやすく書くと、$(a-bx)\,y'=c$ （a,b,c は定数）

★方法—「変数分離」 を使えば良い。変数 υ と t を右辺と左辺に分けてしまう。

まず、$\dfrac{d\upsilon}{dt}=\dfrac{V\rho}{M_0-\rho t}=\dfrac{V}{M_0/\rho-t}$ なので、左辺の dt をはらって、

$$d\upsilon=\frac{V}{M_0/\rho-t}dt$$

となる。これを両辺積分すると、

$\displaystyle\int d\upsilon=\int\frac{V}{M_0/\rho-t}dt$ なので、簡単に積分を実行出来て、

$$\upsilon(t)=-V\log\left(M_0/\rho-t\right)+C$$

となる。C は積分定数

1-5 積分定数を決める

式の形から、C は初期速度のようなものであるらしいのだが、

$t=0$ を代入すると、$\upsilon(0)=-V\log\left(M_0/\rho\right)+C$

となるので、初期速度を $\upsilon_0=\upsilon(0)$ と定義すれば、$C=\upsilon_0+V\log\left(M_0/\rho\right)$

注）確かに、初期速度のようなものではあった。

この C を解に代入すると、

$$\upsilon(t)=-V\log\left(M_0/\rho-t\right)+\upsilon_0+V\log\left(M_0/\rho\right)$$

$$=-V\log\frac{M_0/\rho-t}{M_0/\rho}+\upsilon_0=-V\log\left(1-\frac{\rho t}{M_0}\right)+\upsilon_0$$

という答えが得られる。

1-6 $\upsilon=-V\log\left(1-\dfrac{\rho t}{M_0}\right)+\upsilon_0$ がどのような運動か調べる

この関数がどうなるかは、実はテイラー展開してみると大変よくわかる。

log のテイラー展開は難しそうだが、実はそんなことはない。
まず、等比級列の和が、

$1+x+x^2+x^3+x^4\cdots=\dfrac{1}{1-x}$ となることを思い出す(便利な式なので是非覚えたい)。

注)実はこれは$\dfrac{1}{1-x}$をxが小さいとした場合のテイラー展開なのだ!

$x=0.001$ くらいなら、$\dfrac{1}{1-x}\approx 1+x$として間違いない。

$x=0.1$ くらいだと$\dfrac{1}{1-x}\approx 1+x+x^2+x^3$としないとだめ。

この両辺を単純に積分すると、

$$左辺=\int 1+x+x^2+x^3\cdots dx=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\cdots$$

$$右辺=\int\frac{dx}{1-x}=-\log(1-x)$$

となる。積分定数 C は両辺が x のどこかの値で一致するように決めれば良い。
たとえば$x=0$を代入すれば、0=0 で一致しているので、C=0 で良いことがわかる。

1-7 テイラー展開で時間依存性を調べる

簡単のため、$\upsilon_0=0$とする。$\upsilon=-V\log\left(1-\dfrac{\rho t}{M_0}\right)$の式で、$x\equiv\dfrac{\rho t}{M_0}$と置くと、

$\upsilon=-V\log(1-x)$ なので、先ほどのテイラー展開を適用できる(次ページ上図)。

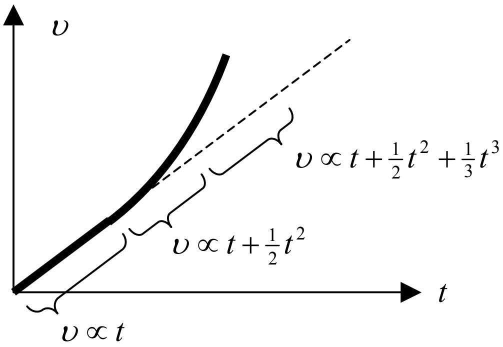
イ) x が非常に小さいとき
xの値が小さいので$x<<x^2<<x^3$であるから、テイラー展開の初項のみを見ればよく、

$$\upsilon=-V\log(1-x)\approx Vx=\frac{V\rho}{M_0}t$$

となって、出だしはほぼ、等加速度運動であることがわかる。
この理由は、ロケットに搭載している燃料の量 M_0 が多いので、多少噴射しても、最初のうちはロケット全体の重量は殆ど変わらないからと見ることが出来る。

ロ) x が少し大きくなったとき
だんだん、べきが大きなものが合わさってくる。これは、等加速度運動よりも急激に加速が進むことを表している。この理由は、ロケットが燃料が減ってきて、重量が軽くなり、重量の変化率 dm/M が比較的大きくなったからと考えられる。

ハ) 途中で燃料がなくなると、速度は一定になる
ロケットの筐体(きょうたい、入れ物)の重さがあるので、対数の中が 0 になる前に噴射は止まる



1-8 いろいろな定数に対する依存性

$\upsilon = -V \log\left(1-\dfrac{\rho t}{M_0}\right)$ の式が直感と合っているか

どうかを確かめよう。

V — 燃料の噴射速度が速ければ加速も大きい

ρ — 噴射量が多ければ加速も大きい（上図で同じ t の値でも、横軸が右に行く）

M_0 —ロケットの初期質量が重いと最初はなかなか加速しない

（上の逆。同じ t の値でも、横軸が左に行く）

1-9 噴射量 ρ が大きいほど良いのか？

早く噴射が終了するので、一考が必要。

ロケットの筐体の質量を m_0 とすると燃料部分の質量は $M-m_0$ なので、噴射は $M-m_0=\rho t$ を満たす時刻で終了する。その時の速度 υ_{f} は、

$$\upsilon_{\mathrm{f}} = -V \log\left(1-\frac{\rho t}{M_0}\right)_{t=(M-m_0)/\rho} = -V \log\frac{m_0}{M_0} = V \log\frac{M_0}{m_0}$$

となるので、何と、ρ によらないことがわかる。この二つは同じなのだ— $\left\{\begin{array}{l}\text{ゆっくり長く噴射}\\ \text{勢い良く短く噴射}\end{array}\right.$

υ_{f} を大きくするには

A. 噴射速度 V を上げる

B. ロケットの筐体質量 m_0 を小さくする

C. 燃料 M_0 を多く搭載する

大型ロケットが多段式なのは空になった燃料タンクを捨てた方が、m_0 を小さく出来るから。

なお、噴射速度の値 V は燃料の化学反応によって決まるので力学では議論できない。

2 びっくりボール

小さなスーパーボールと大きなスーパーボールを重ねて落下させる。

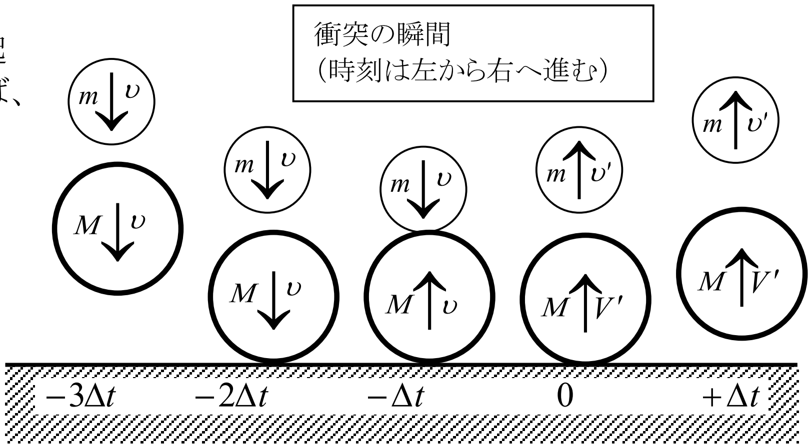
2-1 衝突の瞬間の運動量保存

えんちょく
鉛直落下なので運動量は保存していなさそうだが、、、、

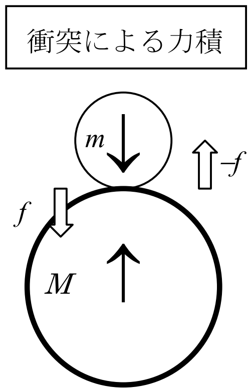
確かに<u>長時間見れば</u>保存していない。

しかし、衝突は一瞬（$\Delta t \to 0$）で起こるとしてその瞬間だけを考えれば、重力による力積 $I = \Delta t \cdot mg$ は限りなく 0 に近いので無視できる。

よって、重力による運動量の変化は考えなくとも良い。



衝突による力積はどうだろうか。
前頁の下の絵で、時刻 $t = -\Delta t \sim 0$ の間の瞬間を考える。



作用・反作用の法則より、力は逆向きで同じ大きさ。
上向き方向を正に取ると、
大玉の運動量の変化 $\Delta p_M = MV' - (M\upsilon) = f\,\Delta t$
小玉の運動量の変化 $\Delta p_m = m\upsilon' - (-m\upsilon) = -f\,\Delta t$
となるので、両者の和は、
$\Delta p_M + \Delta p_m = MV' + m\upsilon' + (-M\upsilon + m\upsilon) = 0$
となってゼロとなる —— 全運動量の和は保存。

2-2 二つの保存則
弾性散乱であるとすればエネルギーも保存するので、

$$\frac{1}{2}(M+m)\upsilon^2 = \frac{1}{2}MV'^2 + \frac{1}{2}m\upsilon'^2$$
$$(M-m)\upsilon = MV' + m\upsilon'$$

の二式が得られる。

$\dfrac{m}{M} = \mu$ と置けば（二つの式の両辺を M で割っただけだ。こうすると定数が一つ減らせる）

$$\left.\begin{aligned}&(1+\mu)\upsilon^2 = V'^2 + \mu\upsilon'^2\\ &(1-\mu)\upsilon = V' + \mu\upsilon'\end{aligned}\right\} \text{—— (A)}$$

V' を消去するために第二式を自乗すると、
$$(1+\mu)\,\upsilon^2 - \mu\upsilon'^2 = V'^2$$
$$\left((1-\mu)\upsilon - \mu\upsilon'\right)^2 = V'^2$$

第二式の左辺＝$(1-\mu)^2\upsilon^2 - 2\mu(1-\mu)\upsilon\upsilon' + \mu^2\upsilon'^2 = V'^2$

$$\therefore \underbrace{(1+\mu)\upsilon^2 - \mu\upsilon'^2}_{\text{第一式}} = \underbrace{(1-\mu)^2\upsilon^2 - 2\mu(1-\mu)\upsilon\upsilon' + \mu^2\upsilon'^2}_{\text{第二式}}$$

右辺の υ^2 を左辺に移項して、$(3\mu - \mu^2)\upsilon^2 - \mu\upsilon'^2 = -2\mu(1-\mu)\upsilon\upsilon' + \mu^2\upsilon'^2$

υ' の降べきに整理して、$-\mu(\mu+1)\upsilon'^2 + 2\mu(1-\mu)\upsilon\upsilon' + \mu(3-\mu)\upsilon^2 = 0$

μ で除（割って）して、$-(\mu+1)\upsilon'^2 + 2(1-\mu)\upsilon\upsilon' + (3-\mu)\upsilon^2 = 0$

2-3 大玉が十分大きい場合の解

$\mu \to 0$ の場合、$-\upsilon'^2 + 2\upsilon\upsilon' + 3\upsilon^2 = -(\upsilon' - 3\upsilon)(\upsilon' + \upsilon) = 0$

小玉は、最終的に上に進むので、最初の因子(factor)の $(\upsilon' - 3\upsilon) = 0$ が解。

大玉は $\mu \to 0$ を大分前の式(A)の下式に入れれば $V' = \upsilon$ とわかる。

小玉が飛び上がる速さは 3 倍なので高さは 9 倍となる。

2-4 二次方程式の意味の無い解

問題の式が二次方程式になる場合、解の公式に現れる複号(±)のために「意味の無い解」が現れる。どちらの解が正しいのかは、解の符号や、自乗する前の運動量保存の式に戻って考えればわかる。

今回の場合は、二番目の因子の $(\upsilon' + \upsilon) = 0$ の解で、$\upsilon' = -\upsilon,\ V' = \upsilon$ が「意味の無い解」だ。

この解は本当に意味がないのだろうか。

実は時刻 $t = -\Delta t$、すなわち、二球の衝突直前の速度だ。運動量保存の式を自乗してしまったため、符号が異なる場合の解が混入して来たのだ。

このように、「複号による意味の無い解」は、確かに「正解」ではないかも知れないが、全く、non-sense なわけではない。試験の時には慌てる原因になってしまう、この「意味の無い解」の意味を考えてみるのはとても面白いことだ。

2-5 大玉小玉が同じ場合の解

$\mu \to 1$ とすると、$-2\upsilon'^2 + 2\upsilon^2 = 0$ となり、小玉が上に進むことから $\upsilon' = +\upsilon$

前の式(A)下に $\mu \to 1$ を代入して、$0 = V' + \upsilon'$ となり、$V' = -\upsilon$ を得る。

つまり、大玉は一旦、下方向に跳ね返り、再び床と衝突して上に飛び上がるというわけ。

2-6 弾性衝突でない場合。

衝突係数 e を用いて $\begin{aligned} & e \times 2\upsilon = \upsilon' - V' \\ & (M - m)\upsilon = MV' + m\upsilon' \end{aligned}$

$\therefore (M - m)\upsilon = M(\upsilon' - 2e\upsilon) + m\upsilon'$

$\therefore ((1 + 2e)M - m)\upsilon = (M + m)\upsilon'$

$\therefore ((1 + 2e) - \mu)\upsilon = (1 + \mu)\upsilon'$

$\therefore \upsilon' = \dfrac{((1 + 2e) - \mu)}{(1 + \mu)}\upsilon$ となり、$e \to 1$ とすると、確かに弾性衝突と同じ結果を得る。