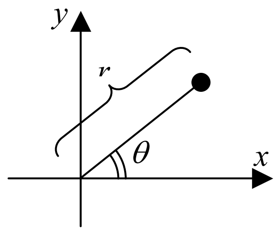
極座標に慣れる ― ループコースターの問題

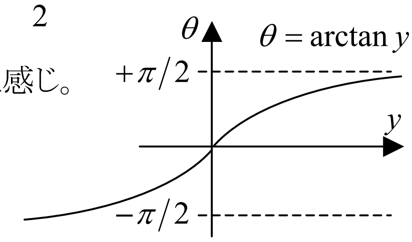


1 二次元

$\vec{x} = (r\cos\theta, r\sin\theta)$

逆変換は、$r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$, 但し$x = 0$の場合は$\theta = \dfrac{\pi}{2}$

$\arctan y = \theta$とは、$\tan\theta = y$の逆関数。 グラフは tan を横にした感じ。



※実は arctan は多価関数なのだが詳しくは物理数学で

2 速度と加速度

$\vec{x} = (r\cos\theta, r\sin\theta)$を微分。

$$\boxed{\text{ベクトルの微分とは？―計算は}\ \frac{d\vec{x}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)\ \text{と各成分を微分するだけ}}$$

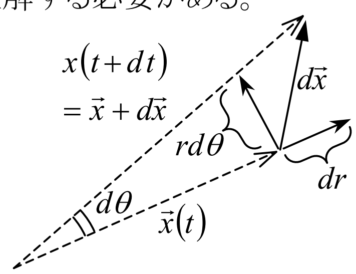
$$\therefore \vec{v} = \left(\dot{r}\cos\theta + r\tfrac{d}{dt}(\cos\theta), \dot{r}\sin\theta + r\tfrac{d}{dt}(\sin\theta)\right)$$

$$= \left(\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta, \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta\right) \qquad \because \text{合成関数の微分}\ \frac{d}{dt}f(\theta) = \frac{df}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

物理をわかるためには、この式を「矢印の変化」として理解する必要がある。

二つの方向に分解すると、

$$\vec{v}\,dt = d\vec{x} = \underbrace{\dot{r}(\cos\theta, \sin\theta)\,dt}_{\substack{\text{方向がまっすぐ増えた分}\\ \text{右図}dr}} + \underbrace{r\dot{\theta}(-\sin\theta, \cos\theta)dt}_{\substack{\text{方向が曲がったことによる分}\\ \text{右図}rd\theta}}$$



となる。

等角速度円運動の場合は$r =$一定、$\theta = \omega t$ なので、第二項のみになって、

$\vec{v} = r\omega(-\sin\omega t, \cos\omega t)$ $\qquad \because \dot{\theta} = \omega$に注意

で、昔習ったように、確かに$\vec{v} \perp \vec{x}$となっている（内積を取って見よう）。

ちなみに加速度は、もう一度微分して、

$$\vec{a} = \left(\ddot{r}\cos\theta - 2\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta, \ddot{r}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\theta}\cos\theta - r\dot{\theta}^2\sin\theta\right)$$

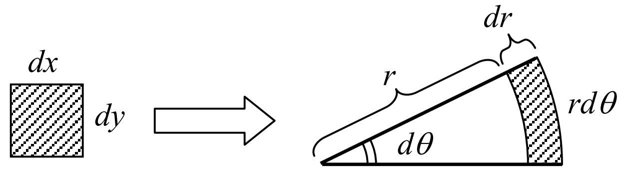
となる。 $\because$真ん中の項の 2 倍の係数は、

$-r\dot{\theta}\sin\theta$のrを微分して出てきた項と、$\sin\theta$を微分して出てきた項の

和になっているところから。

等角速度円運動の場合の加速度は、$\vec{a} = r\omega^2(-\cos\theta, -\sin\theta)$でこれも良く知っている。

3【余談】極座標による積分



Des Cartes 座標による面積　　極座標による面積

二次元の積分で便利。$dS = dxdy = dr \cdot r \cdot d\theta$

なので、例えば円の面積は

$$S = \int dS = \int_0^r \int_0^{2\pi} rdrd\theta = \left. \frac{r^2}{2} \right|_0^r \cdot \theta\Big|_0^{2\pi} = \frac{r^2}{2} 2\pi = \pi r^2$$

となるが、これでは全くありがたみがわかない。そこで、

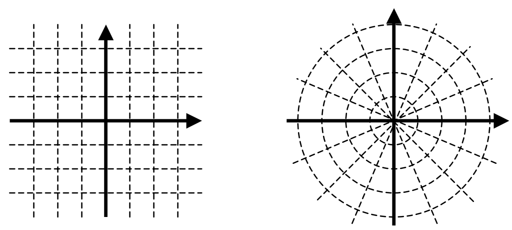
$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ にチャレンジしてみる（高校時代の知識では積分出来なかった）。

変数名を書き換えて $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy$ という式を作ると、

$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy$ である（ここまではあたりまえ）。

ここで x, y の積分範囲は $\begin{cases} x = -\infty \sim +\infty \\ y = -\infty \sim +\infty \end{cases}$ なので、(x, y) 平面の全域で積分するのと同じ（左）。

これを極座標で表せば $\begin{cases} r = 0 \sim +\infty \\ \theta = 0 \sim 2\pi \end{cases}$ となる（右）。


デカルト座標と極座標による面積分
極座標では扇型の大きさがそれぞれ違うので、$xy \to r\theta$ と変数変換する際に、r が入って来て $rd\theta\, dr$ となる。

よって　$I^2 = \int_{r=0}^{r=+\infty} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} e^{-x^2} e^{-y^2} r\, drd\theta$ となる。

$e^{-\left(x^2+y^2\right)} = e^{-r^2}$ なので、$I^2 = \int_{r=0}^{r=+\infty} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} e^{-r^2} r\, drd\theta$

ここで、$r^2 = z$ と変数変換すると、$2rdr = dz$ なので （$\because$ 両辺を r で微分して dr をはらう）

積分の中身は、$e^{-r^2} rdr = e^{-z} r \dfrac{dr}{dz} dz = e^{-z} r \left(\dfrac{dz}{dr} \right)^{-1} dz = e^{-z} r (2r)^{-1} dz = \dfrac{e^{-z}}{2} dz$

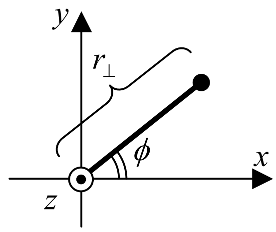
となって、これは単純な指数関数なので積分できてしまう。

以上より、

$$I^2 = \int_{z=0}^{z=+\infty} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} e^{-z} \frac{1}{2} dzd\theta = \frac{1}{2} \left. \left(-e^{-z} \right) \right|_0^{\infty} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta = \frac{1}{2} 2\pi = \pi$$

$\therefore I = \sqrt{\pi}$　この定積分を「ガウス積分」と呼ぶ。

4 三次元の極座標



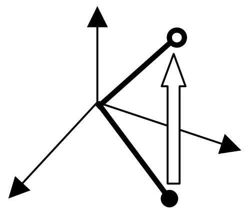
上（z 軸）から見た図

最初のページの二次元の絵を右上図のように書き換えます。

（具体的には変数名を$\theta \to \phi$, $r \to r_\perp$と書き換えた）

次に、黒丸●を z 軸方向（紙面から飛び出る方向）に持ち上げます。

そのようすを横から見たのが右中・右下図です。


持ち上げる

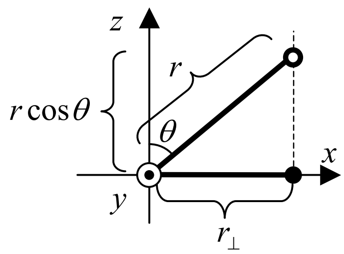
持ち上げられた先の点を白丸**○**で表しています（θの定義に注意）。

すると、$r_\perp = r\sin\theta$ や、**○**の z 座標＝$r\cos\theta$などがわかります。

これを二次元の極座標の式$\vec{x} = \left(r_\perp \cos\varphi, r_\perp \sin\varphi\right)$に代入すると、

$$\vec{x} = \left(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta\right)$$

が得られます。



横（y 軸）から見た図

逆変換は、

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ ,\ \ \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right),\ \ \theta = \arctan\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

$$\because \sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta = \sin^2\theta + \cos^2\theta$$

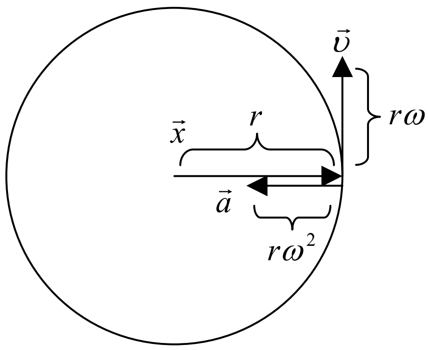
5 ループのジェットコースター

どこで加速度が一番大きいか、あるいは、落ちないか、という問題を議論しよう

【準備問題】—水平ループ

まず、簡単な例「水平面内の円運動」から始めよう。

摩擦がなければ等角速度運動なので、さっきやったように、



$$\vec{x} = \left(r\cos\omega t, r\sin\omega t\right)$$

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{x}}{dt} = r\omega\left(-\sin\omega t, \cos\omega t\right)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = -r\omega^2\left(\cos\omega t, \sin\omega t\right) = -\omega^2\vec{x}$$

と、とても良く知っている結果が得られる。

6　質点の感じる『慣性力』

円運動する質点の上に乗ってみるとどのような『見かけの力』を受けるだろうか？

加速度運動する質点に乗ったときに感じる力＝『慣性力』＝ $-m\vec{a}$ （ダランベール（d'Alemvert）の原理）

「加速度運動する座標系に乗ったとき」という言い方もします。

例）加速度運動している車やエレベータの中、回転遊具に乗ったときに感じる「気持ち悪さ」は、すべて慣性力 $\vec{f}_i = -m\vec{a}$ によるものです。

⇔等速直線運動では $\vec{a}=0$ なので慣性力はありません。

詳しくは「コリオリの力」を含めて後で。

7　角速度が $\omega=\omega_0+\beta t$ のように時間変化する場合

まず、角速度が、時間に対してリニア（linear）に変化しているケース、$\omega=\omega_0+\beta t$ を考えます。

β は角速度の変化率です（「加角速度」とでも言えばよいかな）

すると、現在の角度は、角速度を積分したものですから、

$$\theta=\int_0^t \omega\, dt=\omega_0 t+\frac{1}{2}\beta t^2$$ となります（距離と速度と加速度の式と全く同じ形）

これを使うと、

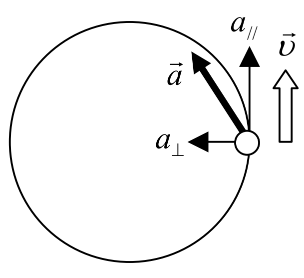
$$\vec{\upsilon}=\frac{d\vec{x}}{dt}=r\frac{d\theta}{dt}\left(-\sin\theta,\cos\theta\right)=r\underbrace{\left(\omega_0+\beta t\right)}_{\omega(t)}\left(-\sin\theta,\cos\theta\right)$$

と、方向は接線方向で、動径方向と垂直で、等角速度運動と同じです。

次に加速度を調べましょう。加速度も、等角速度運動と同じく、動径内向きになるでしょうか？

$$\vec{a}=\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=r\frac{d^2\theta}{dt^2}\left(-\sin\theta,\cos\theta\right)+r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\left(-\cos\theta,-\sin\theta\right)$$

$$=\underbrace{r\beta\left(-\sin\theta,\cos\theta\right)}_{a_{//}}+\underbrace{r\omega^2\left(-\cos\theta,-\sin\theta\right)}_{a_{\perp}}$$



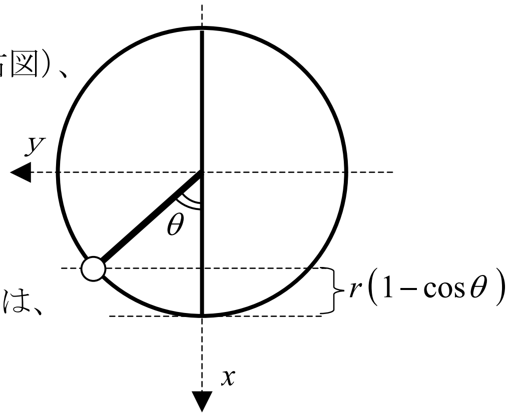
と今度は二つの項が現れ、方向も動径方向とは異なります。

二つの項の意味は、

- 第一項 $a_{//}$ ＝接線方向。角速度が変わるために現れた項
- 第二項 $a_{\perp}$ ＝動径方向。現在の角速度による加速度（動径内向き）

【問題】速度だけがいつでも等角速度運動と同じく、接線方向になる理由を考えましょう。

8 垂直に立ったループ



本題に近づく。まず、鉛直方向から測った角度をθとすると(右図)、

エネルギー保存則より、運動エネルギー$\dfrac{m\upsilon^2}{2}$は、

位置エネルギー$mgr\left(1-\cos\theta\right)$の分だけ減少するはず。

よって最下点での速度をυ_0とすると、上がって来たときの速度は、

$$\frac{m\upsilon^2}{2}=\frac{m\upsilon_0^2}{2}-mgr\left(1-\cos\theta\right)$$

$$\therefore \upsilon^2=\upsilon_0^2-2gr\left(1-\cos\theta\right)$$

で決定されます。方向はいつでも接線方向です(レールにへばりついているから)。

頂上$\theta=\pi$では$\upsilon^2=\upsilon_0^2-2gr\left(1+1\right)=\upsilon_0^2-4gr$

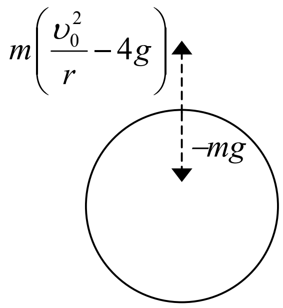
8-1 頂上付近での慣性力

頂上付近では高さが一定なので速度は変化せず、だいたい等角速度運動となります。

よって、加速度は、

方向　下向き

大きさ　$a=r\omega^2=\upsilon^2/r=\upsilon_0^2/r-4g$



遠心力(慣性力)と重力のバランス

慣性力の方向は上向きになります($\because\ \vec{f}_{\mathrm{i}}=-m\vec{a}$)。

以上より、落ちない条件は、慣性力と重力のバランスから$g<a=\dfrac{\upsilon_0^2}{r}-4g$

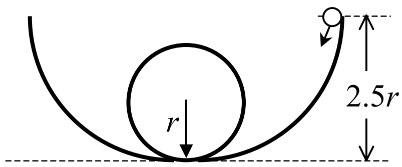
$\therefore \upsilon_0^2>5gr$　となります(右図)。

ここで、$\dfrac{m\upsilon_0^2}{2}=mg\left(\dfrac{5r}{2}\right)$ですから、$2.5r$の高さからスタートすれば頂上で落ちません(右下図)。この結果は有名なので知っている人も多いでしょう。

しかし厳密には途中で角速度が変わるので、$a_{/\!/}\neq 0$

であり、そう簡単ではないはずです。

ループ半径の 2.5 倍からスタートしたジェットコースターは落ちない



9 角速度が(複雑に)時間変化する場合

9-1 準備

$\vec{x}=\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right)=r\left(\cos\theta,\sin\theta\right)$ 及び $\theta=\int_0^t \omega\, dt$ より、

$$\vec{\upsilon}=\frac{d\vec{x}}{dt}==r\dot{\theta}\left(-\sin\theta,\cos\theta\right)=r\omega\left(-\sin\theta,\cos\theta\right)$$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=r\ddot{\theta}\left(-\sin\theta,\cos\theta\right)+r\dot{\theta}^2\left(-\cos\theta,-\sin\theta\right)$$

$$=\underbrace{r\dot{\omega}\left(-\sin\theta,\cos\theta\right)}_{a_{/\!/}}+\underbrace{r\omega^2\left(-\cos\theta,-\sin\theta\right)}_{a_\perp}$$

【注意】先ほど $\omega=\omega_0+\beta t$ のケースと違い、$\omega(t)$ は未だわからない(おそらく複雑)。

9-2 角速度の時間変化をエネルギー保存則から求める

速さの式 $\upsilon=r\omega$ を、エネルギー保存の式 $\upsilon^2=\upsilon_0^2-2gr\left(1-\cos\theta\right)$ に代入して、

$$\omega=\frac{\upsilon}{r}=\sqrt{\frac{\upsilon_0^2}{r^2}-\frac{2g}{r}\left(1-\cos\theta\right)} \quad \text{— (I)}$$

これを微分すると、$\dot{\omega}=\dfrac{d}{dt}\sqrt{\dfrac{\upsilon_0^2}{r^2}-\dfrac{2g}{r}\left(1-\cos\theta\right)}$

$$=\frac{1}{2}\frac{-\dfrac{2g}{r}\sin\theta\cdot\dot{\theta}}{\sqrt{\dfrac{\upsilon_0^2}{r^2}-\dfrac{2g}{r}\left(1-\cos\theta\right)}}=-\frac{g\sin\theta\cdot\omega}{r\sqrt{\dfrac{\upsilon_0^2}{r^2}-\dfrac{2g}{r}\left(1-\cos\theta\right)}} \qquad \because \sqrt{x}'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ここの ω に(I)式を代入すると、$\sqrt{\ }$ の中身が全部キャンセルして、

$$\dot{\omega}=-\frac{g\sin\theta}{r} \quad \text{— (II)}$$

と非常にすっきりした形になった。

9-3 加速度の方向と大きさ

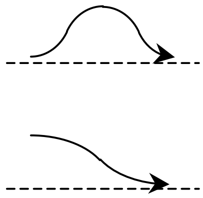
準備のところで求めた

$\vec{a}=r\dot{\omega}\left(-\sin\theta,\cos\theta\right)+r\omega^2\left(-\cos\theta,-\sin\theta\right)$ に、前項の(I), (II)を代入すると、

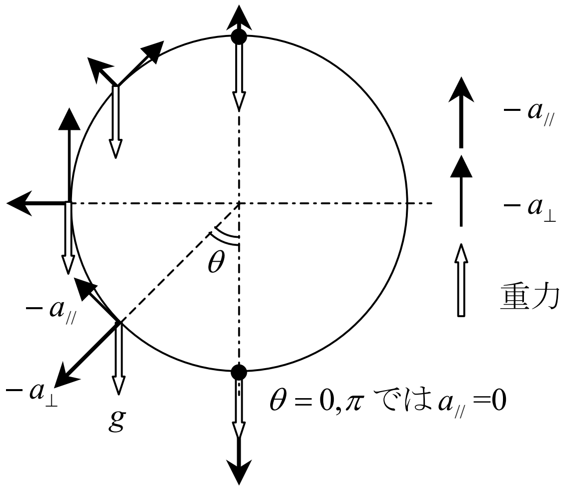
$$=\overbrace{\underbrace{-g\sin\theta}_{\substack{\text{角速度の変化}\\\text{による加速度}\\\propto\dot{\omega}}}\underbrace{\left(-\sin\theta,\cos\theta\right)}_{\text{接線方向}}}^{a_{/\!/}}+\overbrace{\underbrace{\left(\frac{\upsilon_0^2}{r}-2g\left(1-\cos\theta\right)\right)}_{\substack{\text{現時点での角速度}\\\text{による加速度}}}\underbrace{\left(-\cos\theta,-\sin\theta\right)}_{\text{動径方向(内向き)}}}^{a_\perp}$$

という結果が得られる。二つの項の意味の理解が大事。

	$\theta \approx 0$	$\theta \approx \pi/2$	$\theta \approx \pi$
$a_{//}$	水平運動なので0 ∵位置エネルギーが一定なので ωも一定。よって$\dot{\omega}=0$	垂直に上るので大	水平運動なので0
$a_{\perp}$	高速なので大	減速して行き、中	速度が最小なので、小



10 ループを上りあがる質点の感じる『慣性力』



ループを登り上がる質点に働く、
慣性力 $\vec{f}_i = -m\vec{a}$ と重力の変化
（この例では途中で落下する）

d'Alemvert ダランベールの原理：慣性力 $\vec{f}_{\mathrm{i}} = -m\vec{a}$

前項で求めた$a_{//}$と$a_{\perp}$から慣性力を求めて、

（と言っても符号をマイナスにするだけですが、、）

右図に重力と一緒にベクトルで表してみます。

質点がレールから落ちる条件は、

「レールへ垂直に働く力がゼロ」

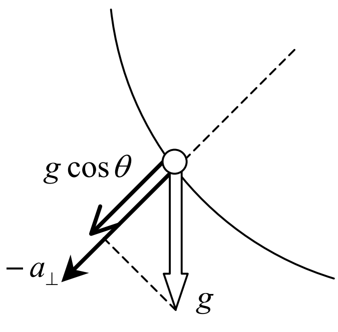
（逆にレールの抗力がゼロ、というのと同じ）

なので、

慣性力と重力のベクトル和の、レールに垂直な成分

$$= \ -a_{\perp} + \left(g\text{の動径方向成分}\right)$$

を調べます（$a_{//}$ は常にレールに平行なので効かない）



レールへ垂直に働く力

すると、右図より、

レールへ垂直に働く力＝$-a_{\perp} + g\cos\theta$

$$= \frac{\upsilon_0^2}{r} - 2g\left(1-\cos\theta\right) + g\cos\theta = \frac{\upsilon_0^2}{r} - 2g + 3g\cos\theta$$

となり、落下開始する角度は、$\cos\theta = \frac{2}{3}\left(1 - \upsilon_0^2/2gr\right)$ と与えられます。

一方、エネルギー保存則$\dfrac{m\upsilon_0^2}{2} = mgr\left(1-\cos\theta\right)$より、初速度が小さいと$\cos\theta = 1 - \upsilon_0^2/2gr$

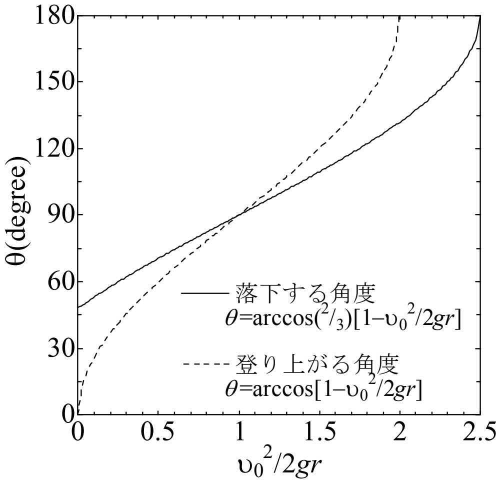
までしか上りません。これらをまとめてグラフ（次頁上図）にすると、

イ) $\theta = 0 \sim \pi/2$ （$\frac{1}{2} m\upsilon_0^2 < mgr$）

$\cos\theta = 1 - \upsilon_0^2/2gr$ で決まるθまで上がり、引き返す

イ) $\theta = \pi/2 \sim \pi$ （$\frac{1}{2} m\upsilon_0^2 > mgr$）

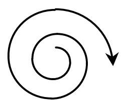
$\cos\theta = \frac{2}{3}\left(1 - \upsilon_0^2/2gr\right)$ で決まるθまで上がり、落ちる



【発展問題】らせんループ(spiral)を走るジェットコースタの加速度を計算してみよう(難しいかも)。

例1　水平面で拡がる渦巻きスパイラル $(r\cos\theta, r\cos\theta)$、但し$r = r_0 e^{\alpha\theta}$， r_0, α は定数

（υ = 一定の条件で$\theta(t)$を求める)



例2　z 軸方向に落ちるスパイラル $(r\cos\theta, r\cos\theta, z)$、但し$r$ = 一定、$z = -p\,\theta/2\pi$， p は定数

(エネルギー保存則$\frac{m}{2}\upsilon^2 = mgz$から$\theta(t)$を求める)