

1 重力ポテンシャル中の運動

円運動は既習。初期条件が $\frac{v^2}{r} = \frac{GM}{r^2}$ からずれたらどうなるか考えよう—結果は楕円 Goal。

- ・ヨハネス・ケプラー(1571-1630)は観測(自分で観測したのではなく、ティコブラーエの観測結果の解析)によってケプラーの三法則を導出: 「楕円軌道、面積速度一定、周期三乗 \propto 軌道長半径の二乗」
- ・ニュートンが微分法の開発によってケプラーの三法則を理論的に導くことに成功した。

2 運動方程式と運動の相似

同じ運動方程式(同じ微分方程式)→同じ運動 これはあたりまえのこと。

$$\vec{f} = m\ddot{\vec{r}} \Rightarrow \text{重力場} - \frac{GMm}{r^2} \hat{r} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

ここで、 $\vec{r} = A\vec{R}$ と全ての長さを A 倍にして見る。すると、

$$\text{左辺: } -\frac{GMm}{A^2R^2} \hat{R}, \text{ 右辺: } mA \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} \quad \because \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2(A\vec{R})}{dt^2} = A \frac{d^2\vec{R}}{dt^2}$$

となり、元の運動方程式と一致はしない。しかし、さらに、時間を $t = BT$ と置いてみると、

$$\text{左辺} - \frac{GMm}{A^2R^2} \hat{R}, \text{ 右辺} m \frac{A}{B^2} \frac{d^2\vec{R}}{dT^2}$$

となって、もし、 $\frac{A^3}{B^2} = 1$ ならば左辺と右辺は一致して、

$$-\frac{GMm}{R^2} \hat{R} = m \frac{d^2\vec{R}}{dT^2} \text{ となる。これは単に } r \rightarrow R \text{ と変数名を変えただけで、}$$

全く 同じ運動方程式 である \Rightarrow よって、同じ運動 になるはず。

つまり、距離(長半径)を A 倍にしたら、時間(周期)は $A^{2/3}$ 倍になる。

3 角運動量

円運動では $L = rp$ であるが、一般には \vec{p} の \vec{r} への垂直成分と、 \vec{r} との積。

注) 平行成分は原点に向かうので、「回転」ではないから除外。

\vec{p}_\perp の大きさは、 $p \sin \theta$ なので、結局、

$$L = rps \sin \theta$$

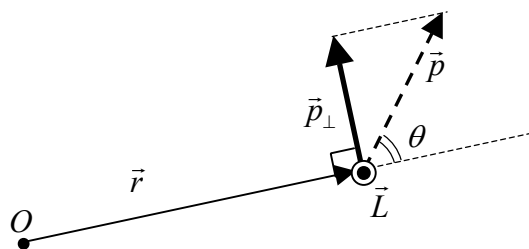
である。方向は回転の軸に平行にとるといろいろ便利なので、

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

と定義すると、一石二鳥で、大きさも方向も定まる。

【性質】 \vec{L} は \vec{p} と \vec{r} のいずれにも垂直。

\vec{L} は原点の取り方で変わる。よって必ず、「どこの点のまわりの角運動量」と言うようにする。



角運動量のイメージ ~ 運動量の回転版。どのくらい激しく回っているか。方向は回転軸。

$\dot{\vec{p}} = \vec{f}$ に対し、 $\dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \vec{f} = \text{トルク}$ (てこの原理で、大きな半径で回した方が激しく回る)

4 角運動量の時間変化

時間で微分してみると、

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}}$$

注) 外積に積の微分の公式が適用できるか
 どうかはそれほど自明ではない。
 自分で成分で書いてみて確かめよう。

【復習】
 二つのベクトルの、
 内積は平行な度合い。
 外積は垂直な度合い。

となり二つの項が現れる。

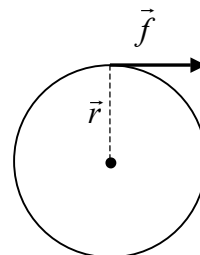
[第一項] $= \dot{\vec{r}} \times \vec{p} = \frac{\vec{p}}{m} \times \vec{p} = 0$ 同じベクトル同士の外積なのでゼロ

[第二項] $= \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{r} \times \vec{f} \quad \because \text{ニュートンの運動方程式}$

よって、 $\dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \vec{f}$ が得られるが、これはどういう式だろうか。

右図からわかるように、

「角運動量の変化には \vec{r} に垂直な力のみが効く」



ということだ。意味は、

- 角運動量の時間変化はトルクに比例 (運動方程式の回転運動版とか剛体版というべきもの)
- 力点の支点からの距離が遠いほど、角運動量は激しく変化 (てこの原理)

5 中心力と角運動量

常に原点に向かう力を考えよう

$\vec{f} = f(r)\hat{r}$ と書ける。これを「中心力」と呼ぶ。但し、 $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$ は \vec{r} 方向の単位ベクトル

$f(r)$ は力の大きさと原点からの距離のみに依存する。注) もし、方向に依存するなら $f(\vec{r})$ と書く

中心力の例としては、

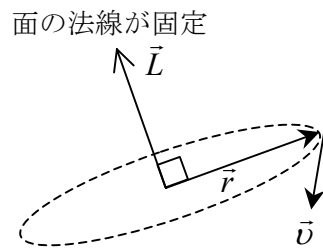
- 原点に固定された質点による重力 $\propto r^{-2}$
- 原点に固定された荷電粒子によるクーロン力 $\propto r^{-2}$
- 原点に固定されたばね $\propto r^1$

などがある。中心力による運動において角運動量はどうなるか見て見ると、

$$\dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \dot{\vec{f}} = \vec{r} \times f(r)\hat{r} = 0$$

となって、時間微分がゼロになるので保存される。

\vec{L} の方向も固定なので、運動は初期条件 \vec{r}_0, \vec{v}_0 で決まる平面内に固定



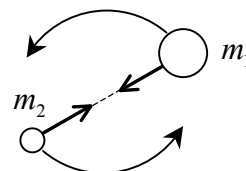
∴その平面の法線が L であり、それが常に固定。

⇒意味—中心力は θ に寄らないので、回転に対して対称であるため角運動量保存 (c.f. 並進に対して対称であると、運動量保存)

6 二体問題

重力場の問題は本当は二つの質点の問題 ⇨ どちらの質点(地球、太陽)も動く。

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\vec{x}}_1 = \vec{f}_{12} \\ m_2 \ddot{\vec{x}}_2 = \vec{f}_{21} \end{cases} \text{ の連立微分方程式 (式は6本!!)}$$



ここで $\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}$ 作用反作用の法則、より、 $m_1 \ddot{\vec{x}}_1 + m_2 \ddot{\vec{x}}_2 = 0$

よって、 $\vec{X} = \frac{m_1 \ddot{\vec{x}}_1 + m_2 \ddot{\vec{x}}_2}{m_1 + m_2}$ (重心座標) と置くと $\dot{\vec{X}} = \text{一定}$ (等速直線運動)

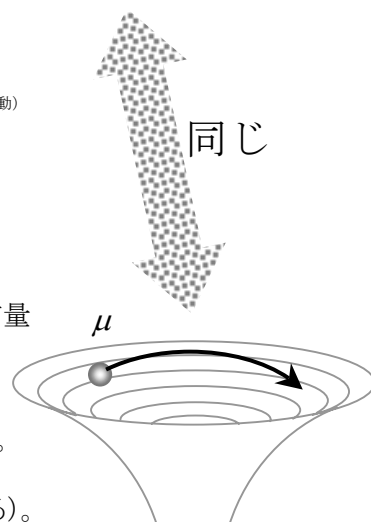
これは、お互いの座標の加重平均のようなもの。

それでは、お互いの座標の差(相対位置)はどうだろうか。

$$\ddot{\vec{x}}_1 - \ddot{\vec{x}}_2 = \frac{\vec{f}_{12}}{m_1} - \frac{\vec{f}_{21}}{m_2} = \vec{f} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = \vec{f} \mu, \quad \text{但し } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \text{ — 換算質量}$$

∴ $\mu(\ddot{\vec{x}}_1 - \ddot{\vec{x}}_2) = \mu \ddot{\vec{x}} = \vec{f}$ というポテンシャル中の一質点の問題に還元された。

(直感的にも、 $m_1 \rightarrow \infty$ ならば、 m_2 は m_1 のまわりをぐるぐる回っていると言える)。



7 エネルギー保存則

単純に $E = \frac{\mu v^2}{2} + U(\vec{x})$ です。 $\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ がベクトルなので、極座標で表すと、

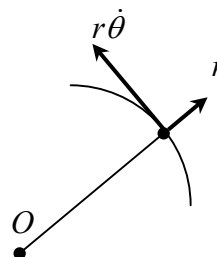
$$\vec{v} = \dot{\vec{x}} = \frac{d}{dt}(r \cos \theta, r \sin \theta) = (\dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta, \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta) \text{ となるので、}$$

自乗すると、クロスタームはキャンセルして、

$$v^2 = \dot{r}^2 \cos^2 \theta + r^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + \dot{r}^2 \sin^2 \theta + r^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2$$

二つの項のイメージは右図。

運動エネルギーの中身
(動径方向と接線方向)



8 重力場中におけるエネルギー保存と角運動量保存

イ) エネルギー保存: $E = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{\mu}{2} r^2 \dot{\theta}^2 - \frac{\alpha}{r}$, 但し $\alpha = Gm_1 m_2$, $E = \text{定数}$ 。

ロ) 角運動量保存: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = (r \cos \theta, r \sin \theta, 0) \times (r \dot{\theta} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta, \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta, 0)$
 $= m(0, 0, r^2 \dot{\theta}) = \text{定数}$ 。 但し、角運動量の方向を z 軸に取った。
 $\therefore L = m r^2 \dot{\theta} = m r v$ となって、良く知っている結果(但し円運動の場合)と一致。
 “ $r \rightarrow$ 小のところでは速く、 $r \rightarrow$ 大のところではゆっくり通過”

【注】昔習った面積速度 $\frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$ とは、実は角運動量(に比例した量)のことだった。

この二つイ)、ロ)を組み合わせると、

$$E = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{\mu}{2} r^2 \left(\frac{L}{m r^2} \right)^2 - \frac{\alpha}{r} = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2 \mu r^2} - \frac{\alpha}{r}$$

と、 r のみ(スカラー量)の運動方程式が得られた。

【注】定数について。 $\alpha = Gm_1 m_2$, $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ は最初から与えられる定数。

L は運動の初期条件(角運動量の初期値)として与えられる定数。

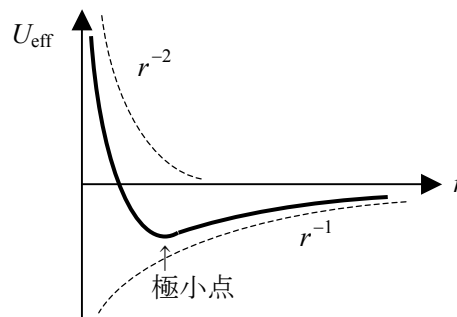
最初の項は運動エネルギーみたいな項で、二番目はポテンシャルみたいな項に見える。

そこで、

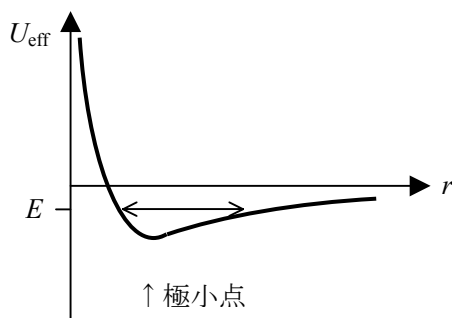
$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2 \mu r^2} - \frac{\alpha}{r}$$

と置いてやると、右図のように極小点が現われる。この U_{eff} を有効ポテンシャル (effective potential) と言う。

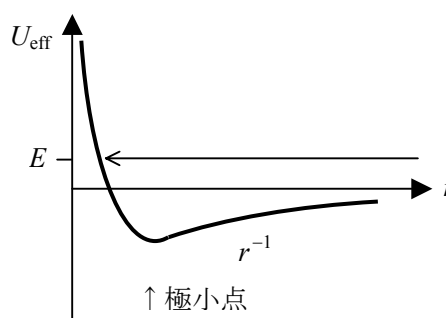
【意味】 U_{eff} には遠心力みたいな項が入っているので、はっきり言って、ポテンシャルでは『無い』。



しかし、こういうのをまとめてポテンシャルと見なすと $E = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + U_{\text{eff}}$ となってわかりやすい。



$E < 0$ の場合は有限範囲で運動 (楕円を真横から見たようす)



$E > 0$ の場合は無限遠に飛び去る

9 軌道の形

9-1 \dot{r} を消去 ($r \leftrightarrow \theta$ の形に持ち込む)。

$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$ に、角運動量の式 $L = \mu r^2 \dot{\theta}$ を代入すると、 $\dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \frac{L}{\mu r^2}$ が得られるので、

$$E = \frac{\mu}{2} \left(\frac{dr}{d\theta} \frac{L}{\mu r^2} \right)^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r}$$

となって、 $r \leftrightarrow \theta$ の関係式が得られた。しかしこれを解くために $r = \frac{1}{u}$ と変数変換すると、

【理由】 $L/\mu r^2$ の r を消すためののだが、そう簡単には思いつかないことだ

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{du} \frac{du}{d\theta} = \frac{-1}{u^2} \frac{du}{d\theta}$$

なので、これを $E =$ の式に代入すると、

$$E = \frac{\mu}{2} \left(-\frac{du}{d\theta} \frac{L}{\mu} \right)^2 + \frac{L^2 u^2}{2\mu} - \alpha u \text{ となる。}$$

【この微分方程式の見方】 複雑な定数に惑わされてはいけない

$$\text{定数} = \text{定数} \times \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + \text{定数} \times u^2 + \text{定数} \times u$$

というとても簡単な形であることに気が付かなくてはならない。

9-2 変数分離

上の式は一階微分しか含んでいない。

一階の微分方程式は大抵確実に解ける。(⇔二階微分方程式は万能な解き方はない)

左辺と右辺に u と θ を分けてしまえば良い。

もちろん、 $\frac{du}{d\theta}$ も du と $d\theta$ に分けてしまう。

まず定数係数を整理してから始めることにする。

$$\frac{du}{d\theta} \text{ を左辺に持って行って、} \left(-\frac{du}{d\theta} \frac{L}{\mu} \right)^2 = -\frac{L^2 u^2}{\mu^2} + \frac{2\alpha u}{\mu} + \frac{2E}{\mu}$$

$$\text{開平して、} \frac{du}{d\theta} = \pm \frac{\mu}{L} \sqrt{-\frac{L^2 u^2}{\mu^2} + \frac{2\alpha u}{\mu} + \frac{2E}{\mu}} = \pm \sqrt{-u^2 + \frac{2\alpha\mu u}{L^2} + \frac{2\mu E}{L^2}}$$

ここで変数分離すると、

$$\frac{du}{\pm \sqrt{-u^2 + \frac{2\alpha\mu u}{L^2} + \frac{2\mu E}{L^2}}} = d\theta$$

となる。よけいに複雑になっただけじゃないか、などと文句を言ってはいけない。

こうすると、単純に積分できるのだ。反対に、 r, θ が絡み合った式では絶対に積分出来ない。

両辺積分すると、

右辺は $\int d\theta = \theta$ になる。積分定数を考えれば $= \theta - \theta_0$ とすべきだと、角度の原点を θ_0 に取る。

左辺は、 $\sqrt{\quad}$ の中身は completing square 平方完成すれば、 $-\underbrace{\left(u - \frac{\alpha\mu}{L^2}\right)^2}_{x^2} + \underbrace{\frac{\alpha^2\mu^2}{L^4} + \frac{2\mu E}{L^2}}_{a^2}$ なので、

さらに変数変換 $u - \frac{\alpha\mu}{L^2} = u - u_0 = x$ を行くと、 $du = dx$ より、

左辺 $= \pm \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ となる。

この積分は $x = a \cos \phi$ と、もう一度変数変換すると、 $dx = -a \sin \phi d\phi$ より、

$$= \pm \int \frac{-a \sin \phi d\phi}{\sqrt{a^2 - a^2 \cos^2 \phi}} = \pm \int d\phi = \pm \phi$$

と簡単に実行出来てしまう。結局、 ϕ の定義から、 $\phi = \pm \arccos \frac{x}{a}$ だから、

右辺: $\theta = \pm \arccos \frac{x}{a}$: 左辺

という簡単な結果を得る。

9-3 軌道の形を表す関数

単純に \arccos をはらって、 $\cos(\pm \theta) = \frac{x}{a} = \frac{u - u_0}{a}$ となるので、

$$r = \frac{1}{u} = \frac{1}{u_0 + a \cos \theta} = \frac{\overbrace{u_0^{-1}}^{=l}}{1 + \underbrace{a u_0^{-1}}_{=\varepsilon} \cos \theta} = \frac{l}{1 + \varepsilon \cos \theta} \text{ が求めたかった関数。}$$

$$\text{但し、} l = u_0^{-1} = \frac{L^2}{\alpha\mu} \text{ 及び } \varepsilon = a u_0^{-1} = a l = \frac{L^2}{\alpha\mu} \sqrt{\frac{\alpha^2 \mu^2}{L^4} + \frac{2\mu E}{L^2}} = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\alpha^2 \mu}}$$

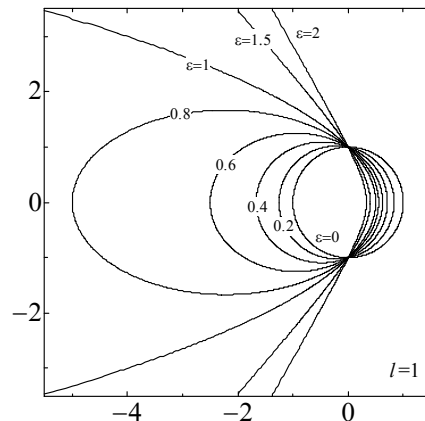
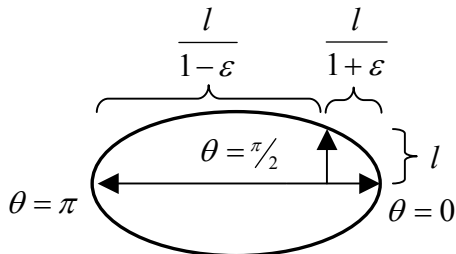
この関数はどんな形を表すのかを見てみよう。

まず、

• $\varepsilon = 0$ で、円 ($r = l$) になる。 ; 理由 — これくらいは自分で考えよう。

• $1 > \varepsilon > 0$ では楕円になる(下左図)。【重要】この条件は $E < 0$ だ。 U_{eff} のグラフで意味を理解せよ。

$\theta \rightarrow \pm\theta$ に関して対称(下図で上下対称ということ)なので、



$\theta \rightarrow \theta + 2\pi$ で同じ半径に戻って来る

⇒ 軌道は閉じている。

大体の形はわかったので、もう少し定量的に調べよう。とりあえずグラフにして見る。

極座標 $\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases}$ にして、 $r = \frac{l}{1 + \varepsilon \cos\theta}$ を代入すると、 θ による媒介変数表示になる。

【余談】閉じるのは重力ポテンシャル $-\alpha/r$ ともう一種類 αr^2 の場合のみ

$U = -\alpha/r^n$ で n が 1 からずれると、閉じなくなる。

相対論の効果など、他の効果が混じって来ても閉じなくなる —— 「水星の近日点移動」

10 許される r の範囲

10-1 $E < 0$ の場合

$$\text{エネルギー保存の式 } E = \underbrace{\frac{\mu}{2} \dot{r}^2}_0 + \underbrace{\frac{L^2}{2\mu r^2}}_{U_{\text{eff}}(r)} - \frac{\alpha}{r}$$

を満たす $r_{\min} \sim r_{\max}$ の間で運動することがわかっているので、

$$Er^2 + \alpha r - \frac{L^2}{2\mu} = 0 \text{ を解けば、両端の } r \text{ の値が求められる:}$$

$$\therefore r_{\min, \max} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 2EL^2/\mu}}{2E} = \frac{\alpha}{2E} \left(-1 \pm \sqrt{1 + 2EL^2/\mu\alpha^2} \right) = \frac{\alpha}{2E} (-1 \pm \varepsilon) = \frac{\alpha}{2|E|} (1 \mp \varepsilon)$$

ここで分子分母に $1 \pm \varepsilon$ を乗ずると、

$$= \frac{\alpha}{2|E|} \frac{1-\varepsilon^2}{1\pm\varepsilon} = \frac{\alpha}{2|E|} \frac{\overbrace{-2EL^2/\mu\alpha^2}^{1-\varepsilon^2}}{1\pm\varepsilon} = \frac{\overbrace{L^2/\mu\alpha}^l}{1\pm\varepsilon} = \frac{l}{1\pm\varepsilon} \quad (\because \frac{E}{|E|} = -1)$$

10-2 $E \geq 0$ の場合、 $\varepsilon \geq 1$ となるので、 $r_{\min} = \frac{l}{1+\varepsilon}$, $r_{\max} = \infty \Rightarrow$ 二度と戻って来ない!

11 周期

面積速度 $\frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{L}{2\mu}$ なので、これを変数分離すると、

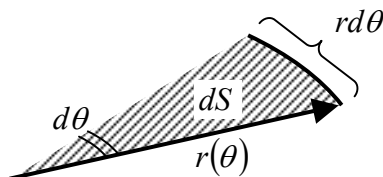
$$\frac{r^2 d\theta}{2} = \frac{L}{2\mu} dt$$

となるので、一周積分して、

$$\int_0^{2\pi} \frac{r^2 d\theta}{2} = \frac{L}{2\mu} T$$

左辺は $= \int dS = S = \pi ab$

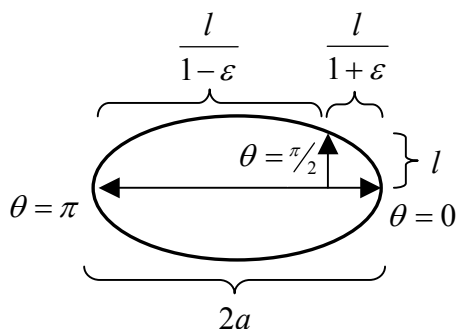
$$\therefore T = \frac{2\mu\pi ab}{L}$$



$$dS = \frac{1}{2}r \cdot rd\theta = \frac{1}{2}r^2 d\theta$$

注) 上側の $r(\theta + d\theta) = r(\theta) + dr$ と $r(\theta)$ のずれは、 $O(d\theta^2)$ なので無視できる。

12 ケプラーの第三法則



右枠の楕円の性質より、

$$T = \frac{2\mu\pi ab}{L} \propto ab = a^{3/2}$$

【楕円の性質】

[長軸]

$2a = r(0) + r(\pi)$ であるから、

$r = l/(1 + \varepsilon \cos \theta)$ より、

$$2a = r(0) + r(\pi) = l/(1 + \varepsilon) + l/(1 - \varepsilon) = 2l/(1 - \varepsilon^2)$$

[短軸]

$b = y_{\max}$ であるから、 $y = r \sin \theta$ を微分して、

$dy/d\theta = dr/d\theta \cdot \sin \theta + r \cos \theta = 0$ を解いた θ を代入して y_{\max} を求める。

$$\therefore \frac{l\varepsilon \sin^2 \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} + \frac{l \cos \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)} = 0 \text{ で、分母を払って}$$

$$l\varepsilon \sin^2 \theta + l(1 + \varepsilon \cos \theta) \cos \theta = 0$$

$$\therefore l\varepsilon + l \cos \theta = 0 \text{ より、} \cos \theta = -\varepsilon$$

$$\text{よって、} b = r \sin \theta = \frac{l}{1 - \varepsilon^2} \sqrt{1 - \varepsilon^2} = \frac{l}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$

これを a の式に代入すれば、

$$b^2 = al$$