ケプラー問題におけるrとθの時間依存性について

1. 復習

講義では、

エネルギー保存則 $E=\dfrac{\mu}{2}\left|\dot{\vec{x}}\right|^2-\dfrac{\alpha}{r}$

角運動量保存則 $L=\mu r^2\dot{\theta}$

単純な連鎖微分の式 $\dfrac{dr}{dt}=\dfrac{dr}{d\theta}\dot{\theta}$

から、rとθの関係式（＝軌道の形を決める式）$r=\dfrac{l}{1+\varepsilon\cos\theta}$ を導いた。

このプリントではrとθの時間依存性を調べる。

1-1. 中心力

中心力 $\vec{f}=f(r)\,\hat{r}$ では、$\dot{\vec{L}}=\vec{r}\times\vec{f}=\vec{r}\times f(r)\hat{r}=0$ となり、角運動量保存

1-2. 換算質量

二体問題が一体問題に帰着

$$\begin{cases} m_1\ddot{\vec{x}}_1=\vec{f}_{12} \\ m_2\ddot{\vec{x}}_2=\vec{f}_{21} \end{cases} \xrightarrow{\vec{f}_{12}=-\vec{f}_{21}} \begin{cases} \ddot{\vec{x}}=\ddot{\vec{x}}_1-\ddot{\vec{x}}_2=\dfrac{\vec{f}_{12}}{m_1}-\dfrac{\vec{f}_{21}}{m_2}=\vec{f}\left(\dfrac{1}{m_1}+\dfrac{1}{m_2}\right)=\vec{f}\mu \\ \ddot{\vec{X}}=\dfrac{m_1\ddot{\vec{x}}_1+m_2\ddot{\vec{x}}_2}{m_1+m_2}=0 \end{cases}$$

1-3. 二つの保存則

$E=\dfrac{\mu\left|\dot{\vec{x}}\right|^2}{2}+U(\vec{x})$ に、極座標の速度の式と角運動量保存則を代入すると、

$\left|\dot{\vec{x}}\right|^2=\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2$, $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\mu\left(0,0,r^2\,\dot{\theta}\right)=L$ 一定

$$E=\frac{\mu}{2}\dot{r}^2+\frac{L^2}{2\mu r^2}-\frac{\alpha}{r}$$

という一変数の微分方程式が得られる。

２． 微分方程式を解く

$E=\dfrac{\mu}{2}\dot{r}^2+\dfrac{L^2}{2\mu r^2}-\dfrac{\alpha}{r}$ は、$\dot{r}=g(r)$ という形をしているので変数分離で簡単に解けるので、「r の時間依存性」を求めよう。

【注】講義では $\dfrac{dr}{dt}=\dfrac{dr}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{dr}{d\theta}\dfrac{L}{\mu r^2}$ を使って r,θ の方程式にして「軌道の形」を求めた。

2-1．変数分離の方法

$\dfrac{dr}{dt}=g(r)$ の形の微分方程式を解く方法。g の例: $r,\ r^2+ar,\ \dfrac{1}{r+a},\ \cos r,$ etc.

$$\therefore \frac{dr}{g(r)}=dt$$

両辺積分して、

$$\int\frac{dr}{g(r)}=\int dt=t-t_0 \qquad ;t_0 \text{ は積分定数。}$$

と、「逆関数」のような形になるので、r について解いてやれば良い。

2-2．実際の式を解く

$$E=\frac{\mu}{2}\dot{r}^2+\frac{L^2}{2\mu r^2}-\frac{\alpha}{r}$$

より、$\dot{r}^2=\dfrac{2}{\mu}\left(E-\dfrac{L^2}{2\mu r^2}+\dfrac{\alpha}{r}\right)$ なので、方針通りに変数分離して、

$$\frac{dr}{\sqrt{\dfrac{2}{\mu}\left(E-\dfrac{L^2}{2\mu r^2}+\dfrac{\alpha}{r}\right)}}=dt$$

となる。左辺は、$E<0$ なので、$=\dfrac{rdr}{\sqrt{\dfrac{2|E|}{\mu}\left(-r^2-\dfrac{\alpha r}{E}+\dfrac{L^2}{2E\mu}\right)}}$

2-3．r の取り得る範囲

軌道の形は、$l=\dfrac{L^2}{\alpha\mu},\ \varepsilon=\sqrt{1+\dfrac{2EL^2}{\alpha^2\mu}}$ によって、$r=\dfrac{l}{1+\varepsilon\cos\theta}$ と書けた。

この定数を使うと、分母＝0 の解は、

$$r_\pm = -\frac{\alpha}{2E} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\alpha}{E}\right)^2 + \frac{2L^2}{E\mu}} = -\frac{\alpha}{2E} \pm \frac{\alpha}{2E}\sqrt{1+\frac{2EL^2}{\alpha^2\mu}} = -\frac{\alpha}{2E} \pm \frac{\alpha}{2E}\varepsilon = -\frac{\alpha}{2E}(1\pm\varepsilon)$$

となるので、

【注】$E<0$ なので、$r_\pm > 0$ である。

$$dt = \frac{rdr}{\sqrt{\frac{2|E|}{\mu}(r-r_-)(r_+-r)}}$$

と書ける。この積分は有名で a, ε を定数として、

$$r = -\frac{\alpha}{2E}(1-\varepsilon\cos\phi) \quad \text{— A}$$

【注】ϕ を変えて行くと、r は r_- から r_+ まで変化する。

と置けば、

分母の $\sqrt{\ }$ の中身は、$(r-r_+)(r_- - r) = \left(\frac{\alpha}{2E}\right)^2 (1-\varepsilon\cos\phi-(1-\varepsilon))((1+\varepsilon)-(1-\varepsilon\cos\phi))$

$$= \left(\frac{\alpha}{2E}\right)^2 \varepsilon^2 (1-\cos^2\phi)$$

分子は、$rdr = \left(\frac{\alpha}{2E}\right)^2 (1-\varepsilon\cos\phi)\varepsilon\sin\phi\, d\phi$

となるので、

$$dt = \sqrt{\frac{\mu}{2|E|}}\frac{\alpha}{2|E|}(1-\varepsilon\cos\phi)d\phi$$

$$\therefore t = \sqrt{\frac{\mu}{2|E|}}\frac{\alpha}{2|E|}(\phi-\varepsilon\sin\phi) \quad \text{— B}$$

３． r と θ の時間依存性

B 式に A 式を代入して ϕ を消去すれば、$r=r(t)$ が求まる。

$\theta=\theta(t)$ は、角運動量保存則 $L=\mu r^2\dot\theta$ より、$\theta(t) = \int dt \sqrt{\frac{L}{\mu r^2(t)}}$ と求められる。

しかし、形式的にはこのように書けても、実際、式を計算するのは、かなり厄介だ。$r=r(t)$ を出すだけで、arccos が必要だったりする。