どれも易しい問題ですが、★は少しだけハイレベルです(Questions with a star are challenging)。

1　三次元ポテンシャル $U(x,y,z)=-gz$ の中に質量 $m$ の質点がおかれている。

1.1　座標 $(x,y,z)$ におかれた質点に働く力の大きさと方向を求めなさい。Estimate the force.

1.2　座標 $(0{,}0{,}0)$ から、$(1{,}1{,}1)$ まで、質点を移動させるのに必要な仕事を求めなさい。
どういう経路を通って移動させるかは、あなたの自由です。You can define any path as you like.

1.3　座標 $(1{,}1{,}1)$ で質点を離した。質点はどのような運動をするか、運動方程式を解いて示しなさい。

2　二次元ポテンシャル $U(x,y)=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}ky^2$ の中に質量 $m$ の質点がおかれている。

2.1　座標 $(x,y)$ におかれた質点に働く力の大きさと方向を求めなさい。

2.2　座標 $(0{,}0)$ から、$(1{,}0)$ まで、質点を移動させるのに必要な仕事を求めなさい。
どういう経路を通って移動させるかは、あなたの自由です。★余裕のある人は、二通りの経路で計算して、一致することを示しなさい。Calculate the work with two different paths, and confirm that both give the same result.

2.3　座標 $(1{,}0)$ で質点をそっと離した。質点はどのような運動をするか、運動方程式を解いて示しなさい。

3　三次元ポテンシャル $U(x,y,z)=-GM\big/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ の中に質量 $m$ の質点がおかれている。

3.1　座標 $(x,y,z)$ におかれた質点に働く力の大きさと方向を求めなさい。

3.2　座標 $(\infty,0,0)$ から $(a,0,0)$ まで、質点を移動させるのに必要な仕事を求めなさい（$a>0$）。

3.3　座標 $(a,0,0)$ で質点を離した。質点の運動方程式を書きなさい。ヒント— 質点は $x$ 軸上です。

3.4　質点のエネルギー保存則を書きなさい。ヒント — $E$ = 運動エネルギー＋位置エネルギー
★質点の速度と座標の関係をグラフに描きなさい（$x$ と $\upsilon$ の関係をグラフにする）。

4　質点の座標が $\vec{x}=(\cos\omega t,0,0)$ で与えられるとき、速度 $\dot{\vec{x}}$ と 加速度 $\ddot{\vec{x}}$ を求めなさい。

5　質点の座標が $\vec{x}=(R\cos\theta, R\sin\theta, -z_0\theta)$ で与えられるとします。但し、$R$, $z_0$ は定数ですが、$\theta$ は時間に依存します。

5.1　どういう運動か、$\theta$ が変化した際の軌跡を図に描きなさい。Draw the path of motion.

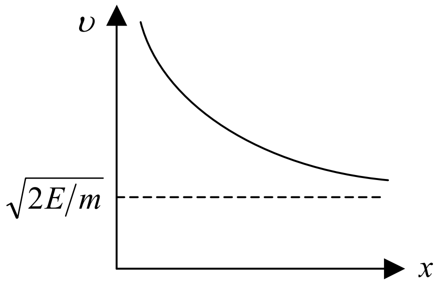
5.2　速度と加速度を求めなさい。

5.3　エネルギー保存則の式を書きなさい。★★微分方程式を解いて $\theta=\theta(t)$ を求めなさい。

1. $\vec{f}=-\nabla U(x,y,z)=(0,0,+g)$　（単位質量あたりに働く力です）
   $W=-mg$（逆に仕事をされる），$\vec{x}=\left(1,1,1+\frac{1}{2}gt^2\right)$
   注）説明し忘れましたが、ポテンシャルを $mgz$ と定義するか $gz$ とするかは教科書によって異なります。同様に、電磁気学の静電ポテンシャルも $U=e\phi$ か、$\phi$ かどちらの場合もあり得ます。よって、題意を良く読み取ってどちらの定義になっているか理解することが必要になります。

2. $\vec{f}=(-kx,-ky)$，$W=\frac{1}{2}k$，$m\ddot{\vec{x}}=(-kx,0)$より、$\vec{x}=\left(\cos\sqrt{k/m}\,t,0\right)$

3. $\vec{f}=-GMm\vec{x}/r^3$，$W=\int_\infty^a -f\,dx=-\left(-GMm(-1/x)\right)_\infty^a=-GMm/a$，$m\ddot{x}=-GMm/x^2$
   $E=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-GMm/x$より、$\dot{x}=\sqrt{2E/m+2GM/x}$




4. $\vec{\upsilon}=(-\omega\sin\omega t,0,0)$，$\vec{a}=(-\omega^2\cos\omega t,0,0)$

5. らせん（spiral）、$\vec{\upsilon}=\left(-R\dot{\theta}\sin\theta,R\dot{\theta}\cos\theta,-z_0\dot{\theta}\right)$
   $\vec{a}=\left(-R\ddot{\theta}\sin\theta-R\dot{\theta}^2\cos\theta,+R\ddot{\theta}\cos\theta-R\dot{\theta}^2\sin\theta,-z_0\ddot{\theta}\right)$
   $E=-mgz_0\theta+\frac{1}{2}m\left(R^2+z_0^2\right)\dot{\theta}^2$より、$\sqrt{\dfrac{E+mgz_0\theta}{+\frac{1}{2}m\left(R^2+z_0^2\right)}}=\dot{\theta}$
   $\therefore dt=\dfrac{d\theta}{\sqrt{a+b\theta}}$ の形になるので、$\therefore t-t_0=\dfrac{2}{b}(a+b\theta)^{1/2}$
   よって、$\therefore\theta=\dfrac{\left(\frac{b}{2}(t-t_0)\right)^2}{b}-a$　（但し、$a=\dfrac{E}{\frac{1}{2}m\left(R^2+z_0^2\right)}$，$b=\dfrac{mgz_0}{\frac{1}{2}m\left(R^2+z_0^2\right)}$　）