慣性モーメント

0.〔復習〕角運動量と角速度

質点の角運動量: $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times(m\vec{v})=\vec{r}\times(m\vec{\omega}\times\vec{r})$, $\therefore L=mr^2\omega$

剛体の角運動量 $\vec{L}=\sum_i \vec{r}_i\times(m_i\vec{\omega}\times\vec{r}_i) \quad =\int \rho(\vec{r})\vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})\,d\vec{r}$

注)この積分は普通の三重積分 $=\int dx\int dy\int dz\rho(\vec{r})\vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$;線積分ではない。

ベクトル三重積の公式 $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$ より、

$$\vec{L}=\sum_i m_i\left(r_i^2\vec{\omega}-(\vec{r}_i\cdot\vec{\omega})\vec{r}_i\right)=\left(\sum_i m_i R(\vec{r}_i)\right)\vec{\omega} \qquad \text{但し、} R=\begin{pmatrix} r^2-x^2 & -xy & -xz \\ -yx & r^2-y^2 & -yz \\ -xz & -yz & r^2-z^2 \end{pmatrix}$$

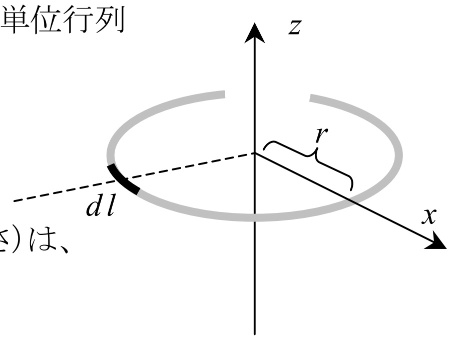
$\therefore$ 慣性モーメント(moment of inertia) : $I=\sum_i m_i R(\vec{r}_i)=\int \rho(\vec{r})R(\vec{r})d\vec{r}$ とおくと $\vec{L}=I\vec{\omega}$

1. 慣性モーメント行列(テンソル) I

注)座標の関数になっている行列をテンソルと呼ぶ

(もう少し厳密には、座標変換した際に、定められた公式で行列自体も変換されるもの)

※行列 I の覚え方 — $R=Er^2-\begin{pmatrix} xx & xy & xz \\ xy & yy & yz \\ xz & yz & zz \end{pmatrix}$;E は単位行列



1-1. 簡単な例―円環(ring)

リング全体の重さを m とすると、線密度(単位長さあたりの重さ)は、

$\rho=m/2\pi r$ (kg/m)となる。

座標軸は、z 軸をリング面に垂直に取る。

体積素片 dl の

- 位置は、$(r\cos\theta, r\sin\theta, 0)$
- 長さは、$dl=rd\theta$
- 質量は、$\rho rd\theta$

なので、これを一周分足し合わせれば良い。

ここでは、r は定数であることに注意して積分すれば、

$$I=\int \rho R(\vec{r})dl=\int \rho R(\vec{r})rd\theta=\rho r\int\begin{pmatrix} r^2-r^2\cos^2\theta & -r^2\cos\theta\sin\theta & 0 \\ -r^2\cos\theta\sin\theta & r^2-r^2\sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix}d\theta$$

$$=\rho r^3\int\begin{pmatrix}\sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta & 0\\ \cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}d\theta \qquad ;\theta=0\sim 2\pi$$

【三角関数の積分】

ここで、$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$ より、

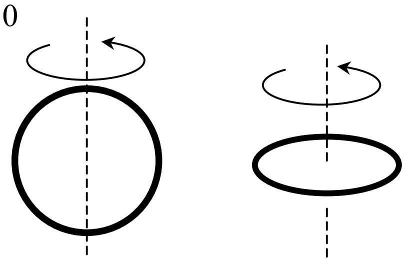
$\cos^2\theta = \dfrac{\cos 2\theta + 1}{2}$, $\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$

よって、$\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi}\sin^2\theta\, d\theta = \pi$

一方、$\cos\theta\sin\theta = \dfrac{1}{2}\sin 2\theta$ なので、$\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin\theta\, d\theta = 0$

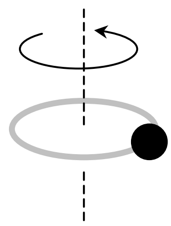
以上より、

$$I=\rho r^3\begin{pmatrix}\pi & 0 & 0\\ 0 & \pi & 0\\ 0 & 0 & 2\pi\end{pmatrix}$$



右の方が二倍だけまわしにくい。

$\rho = \dfrac{M}{2\pi r}$ を代入すると、$I = Mr^2\begin{pmatrix}½ & 0 & 0\\ 0 & ½ & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$



同じ質量なら上と同じ

注）$\vec{\omega} \,//\, z$ の場合は、昔習ったように、確かに $I = Mr^2$ となっている。

1-2. 円盤

リングでなく、円盤。今度は面積分が必要。半径を r とする。

円盤の重さを m とすると面密度は $\sigma = \dfrac{m}{\pi r^2}$ (kg/m^2)

面積素片 dS は、位置 $(\xi\cos\theta, \xi\sin\theta, 0)$、面積 $\xi\, d\theta\, d\xi$、重さ $\sigma\xi\, d\theta\, d\xi$

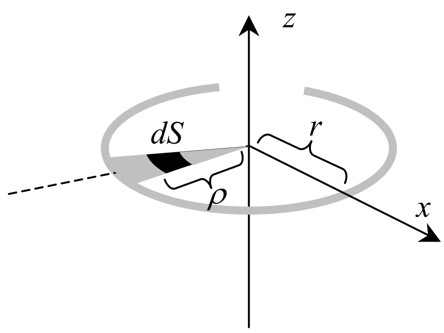
但し、積分変数を動径方向 ξ, 角度 θ とした。

（r は定数＝円盤の半径なので、別の名前の変数 ξ を用意した）

よって、

$$I=\int R(\vec{r})\sigma\, dS = \int R(\vec{r})\sigma\,\xi\, d\theta\, d\xi$$

$$=\sigma\int\begin{pmatrix}\xi^2-\xi^2\cos^2\theta & -\xi^2\cos\theta\sin\theta & 0\\ -\xi^2\cos\theta\sin\theta & \xi^2-\xi^2\sin^2\theta & 0\\ 0 & 0 & \xi^2\end{pmatrix}\xi d\theta\, d\xi$$



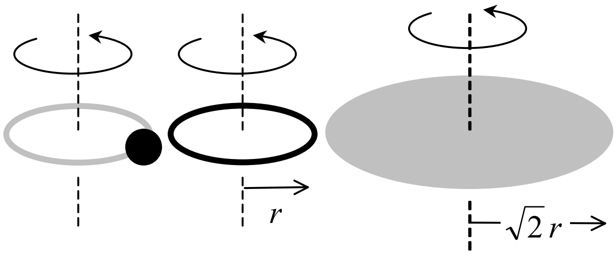
バウムクーヘンのきれはしのような形が面積素辺 dS

ξ は共通なので行列の外に出して積分してしまえる。

$$=\sigma\int\begin{pmatrix} 1-\cos^2\theta & -1\cos\theta\sin\theta & 0 \\ -\cos\theta\sin\theta & 1-\sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\xi^3 d\theta\, d\xi$$

$$=\sigma\cdot\left.\frac{\xi^4}{4}\right|_0^r\cdot\int_0^{2\pi}\begin{pmatrix} 1-\cos^2\theta & -1\cos\theta\sin\theta & 0 \\ -\cos\theta\sin\theta & 1-\sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}d\theta$$

$$=\frac{\sigma r^4}{4}\cdot\begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & 2\pi \end{pmatrix}$$



同じ質量ならどれも同じ回しにくさだ

$\sigma=\dfrac{m}{\pi r^2}$を代入すると、$I=m\left(\dfrac{r}{2}\right)^2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1-3. 球

球は、その形の対称性から、いつでも$\vec{L}\,//\,\vec{\omega}$であると期待されるので$I\propto E$となるはず。

今度は体積積分が必要。球の半径をrとする。

球の重さをmとすると、密度は$\rho=\dfrac{m}{\frac{4}{3}\pi r^3}$ (kg/m^3)

体積素片$d\upsilon$は何回もやったように、

位置は、$(\xi\sin\theta\cos\phi,\ \xi\sin\theta\sin\phi,\ \cos\theta)$、

体積は、$\xi^2\sin\theta\, d\theta\, d\xi$、

重さは密度をかけて、$\rho\xi^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi\, d\xi$

但し、積分変数を動径方向ξ，角度θ，ϕとしている。

$$I=\int R(\vec{r})\rho\, d\upsilon=\int R(\vec{r})\rho\xi^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi\ d\xi \quad ;\xi=0\sim r,\ \theta=0\sim\pi,\ \phi=0\sim 2\pi$$

$$=\rho\int\begin{pmatrix} \xi^2-\xi^2\sin^2\theta\cos^2\phi & -\xi^2\cos\phi\sin\phi\sin^2\theta & -\xi^2\sin\theta\cos\theta\cos\phi \\ -\xi^2\cos\phi\sin\phi\sin^2\theta & \xi^2-\xi^2\sin^2\theta\sin^2\phi & -\xi^2\cos\theta\sin\theta\sin\phi \\ -\xi^2\sin\theta\cos\theta\cos\phi & -\xi^2\cos\theta\sin\theta\sin\phi & \xi^2-\xi^2\cos^2\theta \end{pmatrix}\xi^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi\, d\xi$$

一見大変そうだが、ξ^4を全てくくりだして先に積分してしまえる。

$$=\frac{\rho r^5}{5}\int\begin{pmatrix} 1-\sin^2\theta\cos^2\phi & -\cos\phi\sin\phi\sin^2\theta & -\sin\theta\cos\theta\cos\phi \\ -\cos\phi\sin\phi\sin^2\theta & 1-\sin^2\theta\sin^2\phi & -\cos\theta\sin\theta\sin\phi \\ -\sin\theta\cos\theta\cos\phi & -\cos\theta\sin\theta\sin\phi & 1-\cos^2\theta \end{pmatrix}\sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

ϕの積分を先にやる。範囲$0\sim 2\pi$なので、

$\sin\phi, \cos\phi$ の項は全部消えてしまい、自乗の項 $\sin^2\phi, \cos^2\phi$ は π に、
そして、定数項(対角成分の 1 の項)は 2π となって、

$$= \frac{\rho r^5}{5}\int\begin{pmatrix} 2\pi - \sin^2\theta\cdot\pi & 0 & 0 \\ 0 & 2\pi - \sin^2\theta\cdot\pi & 0 \\ 0 & 0 & 2\pi\left(1-\cos^2\theta\right) \end{pmatrix}\sin\theta\, d\theta$$

$1-\sin^2\theta = \cos^2\theta$ および、$\sin\theta\, d\theta = -d\cos\theta$ に注意すれば、

$$= \frac{\rho\pi r^5}{5}\int\begin{pmatrix} 1+\cos^2\theta & 0 & 0 \\ 0 & 1+\cos^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 2\left(1-\cos^2\theta\right) \end{pmatrix}\left(-d\cos\theta\right)$$

となる。ここで、一見、z 成分だけ異なりそうだが、実は同じになるのだ。実際、

$$= \frac{\rho\pi r^5}{5}\begin{pmatrix} x+\frac{1}{3}x^3 & 0 & 0 \\ 0 & x+\frac{1}{3}x^3 & 0 \\ 0 & 0 & 2x-\frac{2}{3}x^3 \end{pmatrix}_{x=-1\ (\theta=\pi)}^{x=+1\ (\theta=0)} = \frac{\rho\pi r^5}{5}\begin{pmatrix} \frac{8}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{8\rho\pi r^5}{15}E \qquad ;E \text{ は単位行列}$$

$\rho = \dfrac{3m}{4\pi r^3}$ を代入すると、

$$I = \frac{3m}{4\pi r^3}\frac{8\pi r^5}{15}E = \frac{2mr^2}{5}E$$

と良く知っている、有名な結果が得られた。

【注】球はどこから見てもどうまわしても対称的なので、どの成分も等しくなることが予想され、
実際、そうなっている。こういう「対称性」に基づいた議論はとても大事。

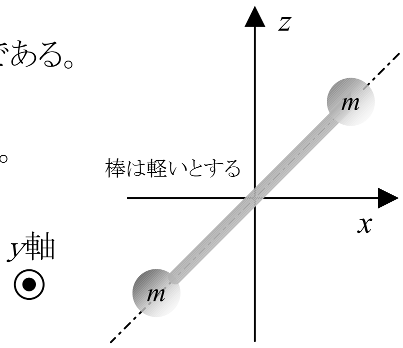
2. 慣性モーメントテンソルに非対角項(non-diagonal term)が現れる場合

ここまでの話で、回転軸の方向によって慣性モーメント=回しにくさが変わることがわかった。

c.f. 電子の質量も金属の中では行列になっていて、進行方向によって大きさが変ってしまう。
まわりの正イオンに進路を妨害されるためだ。

但し、これまで説明した例はすべて、I が対角行列の場合である。
いつでもそうだろうか。右図のような例を考えてみよう。
質点の位置は、$\vec{x}_1 = (a,0,a),\ \vec{x}_2 = (-a,0,-a)$ の二点である。
どちらの質点も、

$$r^2 = x^2+y^2+z^2 = 2a^2$$
$$y = 0$$
$$x^2 = xz = z^2 = a^2$$



棒に対して斜め方向
を軸にして廻す

であることに注意すれば、

$$I=\sum_{i=1\sim 2}Er_i^2-\begin{pmatrix}x_ix_i & x_iy_i & x_iz_i\\ x_iy_i & y_iy_i & y_iz_i\\ x_iz_i & y_iz_i & z_iz_i\end{pmatrix}=\sum_{i=1\sim 2}E\,2a^2-\begin{pmatrix}x_ix_i & 0 & x_iz_i\\ 0 & 0 & 0\\ x_iz_i & 0 & z_iz_i\end{pmatrix}$$

注）和は二項ともに作用する。念のため。

$$=4a^2E-\begin{pmatrix}2a^2 & 0 & 2a^2\\ 0 & 0 & 0\\ 2a^2 & 0 & 2a^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a^2 & 0 & -2a^2\\ 0 & 4a^2 & 0\\ -2a^2 & 0 & 2a^2\end{pmatrix}=\left(\sqrt{2}a\right)^2\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

非対角項が現れた。いったいこれは何だろう。試しに適当な方向にまわしてみよう。

$\vec{\omega}=\begin{pmatrix}0\\0\\\omega\end{pmatrix}$ で回転させると、$\vec{L}=\left(\sqrt{2}\,a\right)^2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ となって $\vec{\omega}$ とは異なる方向。

$\vec{\omega}=\begin{pmatrix}\omega\\0\\\omega\end{pmatrix}$ で回転させると、$\vec{L}=0$ となってまわしているのにまわってない？？？

これは一体全体どういうことだろうか。

まず、後者の方が説明が簡単だ。右図のように、回転軸を斜め上方向にすると、二つの質点は自転することになり、質点は、その定義から、半径ゼロ（＝大きさが無いのが質点）であるから、まわってないのと同じなのだ。

【質点の性質】どんなにグルグル自転させても角運動量は0。
逆に言うと、無限小のトルクでいくらでも回転速度を上げられる。
しかし、角運動量はゼロのままなのだ。

すると、最初の回転軸 $\vec{\omega}/\!/z$ の結果の意味もわかってくる。

$\vec{\omega}=\begin{pmatrix}0\\0\\\omega\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\omega\\0\\+\frac{1}{2}\omega\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}+\frac{1}{2}\omega\\0\\+\frac{1}{2}\omega\end{pmatrix}$ と分解できて、二項目の $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ 軸のまわりの回転は意味が無い（＝角運動量に寄与しない）のであるから、初項の $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ 軸まわりの回転だけが角運動量に寄与して、

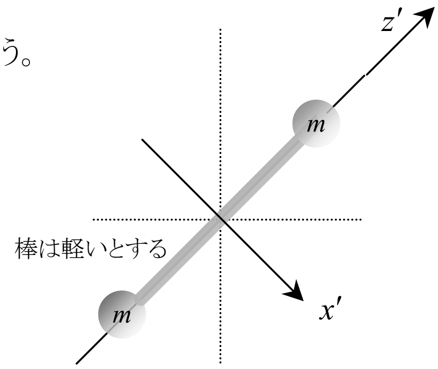
$\vec{L}\propto\begin{pmatrix}-1\\0\\+1\end{pmatrix}$ となるのだ。

3. 慣性主軸

先ほどの問題で、座標軸の取り方を右図のように変えてみよう。
明らかに z 軸の周りに回転しても角運動量はゼロだ。

すると直ちに $I_{zz}=I_{zy}=I_{zx}=0$ であるとわかる。

他の成分も地道に計算してみよう。



$\vec{x}_1=\left(0,0,\sqrt{2}a\right),\ \vec{x}_2=\left(0,0,-\sqrt{2}a\right)$であるから、

$$I=\sum_{i=1\sim2}Er_i^2-\begin{pmatrix}x_ix_i & x_iy_i & x_iz_i\\ x_iy_i & y_iy_i & y_iz_i\\ x_iz_i & y_iz_i & z_iz_i\end{pmatrix}=2\times m2a^2E-2\times\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&2ma^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4ma^2&0&0\\0&4ma^2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

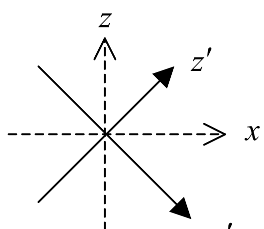
となって、期待した通りの結果 $I=2m\left(\sqrt{2}a\right)^2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ が得られる。

これは対角行列だ。このように、$\boxed{\text{座標軸をうまく選ぶと対角行列になることがわかる。}}$
これを『居行列の対角化』と言う。

4. 座標軸をうまく選ぶと慣性モーメント行列が対角化される？

なぜ座標軸をうまく選ぶと対角化されるのだろうか。
そのために、先ほどの例で、
古い座標軸と新しい座標軸で見たときに、ベクトルの成分表示がどうなっているか調べてみる。
右図から明らかなように、

$$\begin{cases}x'=\frac{1}{\sqrt{2}}(x-z)\\ y'=y\\ z'=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+z)\end{cases}$$



前問と前々問で出てきた、二つの座標軸 xyz と $x'y'z'$

という関係にある。

新しい座標と古い座標の関係を、行列を用いて表すと、

$$\vec{x}=\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&\sqrt{2}&0\\1&0&1\end{pmatrix}}_{P}\vec{x}'$$ と書ける。（この行列を $\vec{P}$ と書く。）

任意の古い座標上のベクトル $\vec{x}$ は、新しい座標上で見ると $\vec{x}'=P^{-1}\vec{x}$ となる。

・よって角速度ベクトル $\vec{\omega}$ も、新しい座標で見ると $\vec{\omega}'=P^{-1}\vec{\omega}$ となる。

・くどいけれど当然のことながら角運動量も、新しい座標で見ると $\vec{L}' = P^{-1}\vec{L}$ となる。
これらの関係式を $\vec{L} = I\vec{\omega}$ に代入してみよう。

$$\underbrace{P\vec{L}'}_{\vec{L}} = I\ \underbrace{P\vec{\omega}'}_{\vec{\omega}}$$

次に、左から P^{-1} をかければ、

$$\vec{L}' = \underbrace{P^{-1}I\,P}_{I'}\vec{\omega}'$$

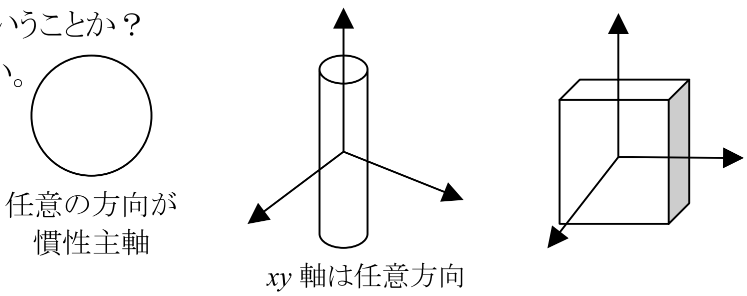
となっている。新しい座標軸 $x'y'z'$ では、$I' = P^{-1}IP$ が対角行列になっていることがわかる。
I' は新しい座標軸で計算したときの慣性モーメントテンソルだ。
つまり、うまく座標変換する（＝うまく P を選ぶ）と、慣性モーメントテンソルが対角化される、
ということなのだ。

5．慣性モーメントテンソルはいつでも対角化できるか？
答え、出来る。理由―対称行列だから。

テンソルの計算で出てきた $R = \begin{pmatrix} r^2 - x^2 & -xy & -xz \\ -yx & r^2 - y^2 & -yz \\ -xz & -yz & r^2 - z^2 \end{pmatrix}$ は明らかに対称行列だ。

【線型代数】 ${}^{T}A = A$ を満たす $\forall A$ について、$\exists U$ が存在し、$U^{-1}AU$ ＝対角行列、と出来る。
具体的な方法（$|A - \lambda E| = 0$ から λ を求め、$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ から求めたいくつかの $\vec{x}$ を並べて U にする）
は、線型代数で詳しく習うことあろう。

6．うまく座標変換する、とは直感的にどういうことか？
対称性の高い方向に座標軸を選べば良い。
うまく対角化された方向が、
「慣性主軸」principal axis
(xyz 軸全てなら principal axes)



対称性からわかる慣性主軸の方向

【余談】
慣性主軸がわかると ⇒ 慣性モーメント行列が対角化できる
逆に言うと、「この行列を対角化したいっ」と思ったら、その行列を慣性モーメントだと思って、
どの軸が対称的な方向になっているか考えれば良いのだ。
注）負の値の固有値が含まれる場合は、その行列を慣性モーメントとみなすことはできないが、
対称性の話（うまく、座標軸を選ぶと対角化されるということ）は成り立つ。

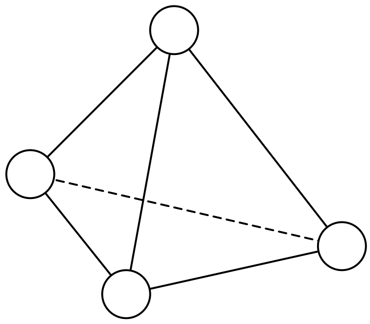
注）慣性モーメント行列の固有値は、質量が正なのと同じように、全て正だ。理由は次回。

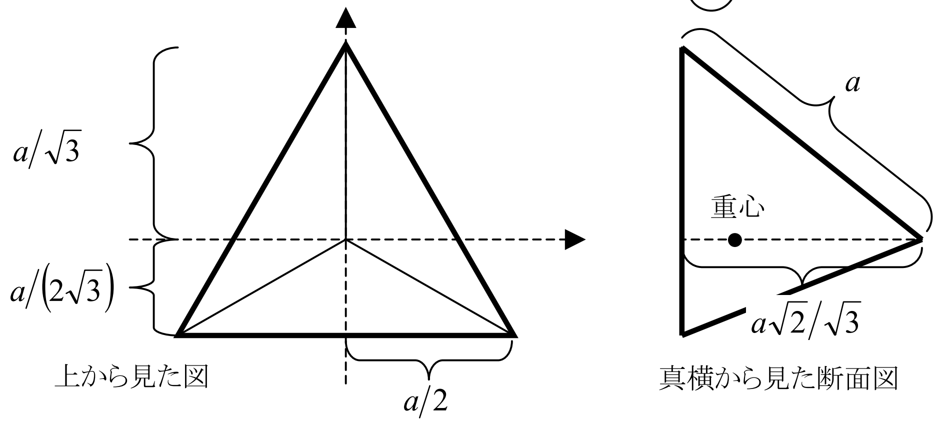
7．練習問題

一片が a の正四面体の頂点上に四つの質点が配置した物体の慣性モーメントテンソルと主軸方向を求めよ

座標軸をどうとればよいかはそれほど自明ではない。

（＝すぐにはわからない、ということ）





上から見た図　　　真横から見た断面図

ヒント―重心位置 $\left(\vec{x}_1+\vec{x}_2+\vec{x}_3+\vec{x}_4\right)/4$ を原点として、真上の質点の方向を z 軸にとって、

x 軸は底面のどれかの辺に平行に取ってみよう。

すると、

各質点の座標は、$\left(0,0,a\sqrt{3}/2\sqrt{2}\right)$, $\left(0,a/\sqrt{3},-a/2\sqrt{6}\right)$, $\left(\pm a/2,-a/2\sqrt{3},-a/2\sqrt{6}\right)$

となり、$r^2=3a^2/8$（全質点同じ）である。