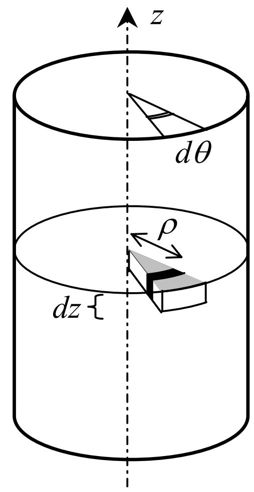
剛体の回転エネルギーとコマ

0. 慣性モーメントテンソル（慣性モーメント行列）

$$\vec{L}=\sum_i \vec{r}_i\times(m_i\vec{\omega}\times\vec{r}_i)=\sum_i m_i\left(r_i^2\vec{\omega}-(\vec{r}_i\cdot\vec{\omega})\vec{r}_i\right)=\left(\sum_i m_i R(\vec{r}_i)\right)\vec{\omega}=I\,\vec{\omega}\qquad \text{但し} R=\begin{pmatrix} r^2-x^2 & -xy & -xz \\ -yx & r^2-y^2 & -yz \\ -xz & -yz & r^2-z^2 \end{pmatrix}$$

慣性主軸＝慣性モーメントテンソルが対角化されるような座標軸



円柱の慣性モーメントテンソルを求める。座標軸は z 軸を円柱に平行にとり、原点は円柱の中心に。

〔練習〕円柱

xy 面のみ極座標（$\rho,\ \theta$）にして、z 軸はそのままデカルト座標にする。
つまり、(ρ,θ,z)とする。これを「円柱座標」という。
積分は、平面極座標×z 座標であるから、$\rho\, d\rho\, d\theta\, dz$ となる。
右図の扇型の中の「黒く塗った微小体積」の位置は、

$x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta, z=$そのまま, $r=\sqrt{\rho^2+z^2}$ であり、

体積は、z 軸方向の厚みを dz とすれば、$d\upsilon=\rho\, d\theta\, d\rho\, dz$

また、円柱の密度は$\dfrac{M}{\pi R^2 L}$ であるから、

$$I=\frac{M}{\pi R^2 L}\int R(\vec{r})d\upsilon=\frac{M}{\pi R^2 L}\int R(\vec{r})\rho\, d\rho\, d\theta\, dz$$

$$=\frac{M}{\pi R^2 L}\int\begin{pmatrix} (\rho^2+z^2)-\rho^2\cos^2\theta & -\rho^2\cos\theta\sin\theta & -\rho\cos\theta z \\ -\rho^2\cos\theta\sin\theta & (\rho^2+z^2)-\rho^2\sin^2\theta & -\rho\sin\theta z \\ -\rho\cos\theta z & -\rho\sin\theta z & (\rho^2+z^2)-z^2 \end{pmatrix}\rho\, d\rho\, d\theta\, dz$$

θの積分$(0\sim 2\pi)$は、cos, sin の項はゼロ、自乗の項はπ、定数の項は 2πとなるので、

$$=\frac{M}{\pi R^2 L}\int\begin{pmatrix} (\rho^2+z^2)2\pi-\rho^2\pi & 0 & 0 \\ 0 & (\rho^2+z^2)2\pi-\rho^2\pi & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 2\pi \end{pmatrix}\rho\, d\rho\, dz$$

あっさり簡単になった***!!!***　係数πを抜き出して、

$$=\frac{M}{R^2 L}\int\begin{pmatrix} 2z^2+\rho^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2z^2+\rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\rho^2 \end{pmatrix}\rho\, d\rho\, dz$$

次に z 積分$(-L/2\sim +L/2)$は、定数項は$2\times\dfrac{L}{2}$、z^2 の項は$2\times\dfrac{(L/2)^3}{3}$ なので、

$$=\frac{M}{R^2L}\int\begin{pmatrix} 2\cdot\frac{1}{12}L^3+\rho^2L & 0 & 0 \\ 0 & 2\cdot\frac{1}{12}L^3+\rho^2L & 0 \\ 0 & 0 & 2\rho^2L \end{pmatrix}\rho\, d\rho$$

最後は、ρ 積分（$0\sim R$）は、積分変数 $d\rho$ の前にある ρ にも気をつけて、

$$=\frac{M}{R^2L}\begin{pmatrix} \frac{L^3R^2}{6\cdot 2}+\frac{R^4L}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3R^2}{6\cdot 2}+\frac{R^4L}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 2\cdot\frac{R^4L}{4} \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} \frac{L^2}{12}+\frac{R^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{12}+\frac{R^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R^2}{2} \end{pmatrix}$$

という結果を得る。ここまで、極座標と慣性モーメントの求め方の復習的練習。（テストにはこんなの絶対に出しませんのでご安心を）

1. 回転のエネルギー

剛体を質点の集まりと思えば、

運動エネルギーは $E=\sum\frac{1}{2}m_i\left|\vec{v}_i\right|^2$

それぞれの質点の速度は以前にやったように $\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$ で与えられる。

よって、$\vec{v}_i^{\,2}=(\underbrace{\vec{\omega}}_{A}\times\underbrace{\vec{r}_i}_{B})\cdot\underbrace{\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_i\right)}_{C}=(\underbrace{\vec{r}_i}_{B}\times\underbrace{\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_i\right)}_{C})\cdot\underbrace{\vec{\omega}}_{A}$

但し、スカラー三重積の性質 $\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{C}=\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)\cdot\vec{A}=\left(\vec{C}\times\vec{A}\right)\cdot\vec{B}$ を使った。

∵スカラー三重積は A,B,C を各辺とする平行六面体（斜め四角柱）の体積なので、どれを底辺に取っても同じ（但し、外積の中の順番を入れ替えると符号が変わる）。

[∵]ちなみに $\vec{A}\times\vec{B}$ は A,B を各辺とする平行四辺形の面積。

ここで、$\vec{v}_i^{\,2}$ の右辺の式の最初の項に m_i をかけると、質点の角運動量

$$\vec{l}_i=\vec{r}_i\times\vec{p}_i=\vec{r}_i\times\left(m\vec{v}_i\right)=\vec{r}_i\times\left(m_i\,\vec{\omega}\times\vec{r}_i\right)$$

になることに気づこう。

すると、$m\vec{v}_i^2=\vec{l}_i\cdot\vec{\omega}$ が成り立つ。

よって、$E=\sum\frac{1}{2}m_i\left|\vec{v}_i\right|^2=\sum\frac{1}{2}\vec{l}_i\cdot\vec{\omega}=\frac{1}{2}\vec{L}\cdot\vec{\omega}$

ここで、$\vec{L}=\sum\vec{l}_i$ は剛体の角運動量（＝各質点の角運動量の和）である。

すると、これまで嫌になるほどやったように、$\vec{L} = I\vec{\omega}$ なのであるから、

$$E = \frac{1}{2}\left(I\vec{\omega}\right)\cdot\vec{\omega}$$

という結果を得る。

この結果は、I が行列であることを思い出すと、$\begin{pmatrix}\omega_x & \omega_y & \omega_z\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z\end{pmatrix}$

という形をしているので、

$$E = \frac{1}{2}\,{}^t\vec{\omega}\, I\, \vec{\omega}$$

と書くと実にかっこ良い。

転置記号を省略して $E = \dfrac{1}{2}\vec{\omega}\, I\, \vec{\omega}$ と書くこともある。

2. 慣性主軸に座標軸を選んだ場合のエネルギー
要するに慣性モーメントテンソルが対角化されるような座標軸だ。

その場合、$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$ とすれば、

エネルギーの式は簡単に、$E = \dfrac{1}{2}\left(I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2\right)$

となる。何と美しい！　$E = \dfrac{1}{2}\left(m\upsilon_x^2 + m\upsilon_y^2 + m\upsilon_z^2\right)$ とそっくりではないか！

【余談】質点の運動エネルギーは m が一定ではないか、とぼやく人へ。ご安心を！
金属の中の電子の質量（＝有効質量）は方向によって異なるのだ。
子の普通の質量の一万倍になったり、逆に負になったりもする。詳しくは固体物理で。

一方、対角化されていない場合は、

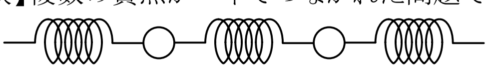
$$E = \frac{1}{2}\left(I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2 + 2I_{xy}\omega_x\omega_y + 2I_{yz}\omega_y\omega_z + 2I_{zx}\omega_z\omega_x\right)$$

という余計な項が入ってくる（注意—I が対称行列であることを思い出そう）。

この式には、$\omega_x, \omega_y, \omega_z$ の二次項（同じものの自乗でも違うものでも全て）が全て含まれている。

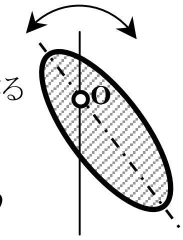
⇒ こういうのを「二次形式」という。

【余談】複数の質点がバネでつながれた問題で再び二次形式が登場する。期待せよ。



【余談―行列の対角化のもう一つの意味】
前回、座標軸を慣性主軸に選ぶと慣性モーメントテンソルが対角化される、と習った。
対角化のもうひとつの意味は、二次形式の自乗項のみが残るように座標変換するということだった。
　　注）大抵の場合、座標変換は座標軸の回転である（ごくたまに反転）。

3．剛体振り子



剛体で作る
振り子
質量 m、
回転軸 O

右図のように剛体の穴 O に横棒を通して振り子を作る（右上図）。
剛体を質点の集まりだと思うと、右中図の体積素片 $d\upsilon$

(注： $d\vec{r}$, $d\upsilon$, $d^3\vec{x}$ とか、いずれも全く同じ意味だ)

に働く重力が、O のまわりのトルク $\vec{T}=\vec{r}\times\vec{f}$ としてどれだけ働くか考えよう。

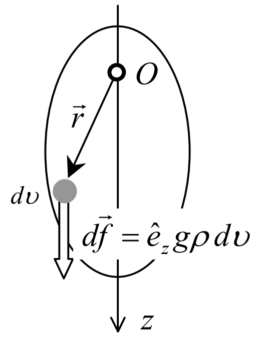
体積素片の位置を $\vec{r}$ 、質量を $dm=\rho\, d\upsilon$ （ρ は密度）とすれば、

体積素片に働く力 $d\vec{f}$ は、　大きさ　$df=g\rho\, d\upsilon$

方向　下向き⇩

なので、　$d\vec{f}=\hat{e}_z g\rho\, d\upsilon$　と書ける。よって、

素片に働くトルクは、$d\vec{T}=\vec{r}\times d\vec{f}$ （方向は紙面に垂直⊙） となる。



体積素片に働くトルクを積分
（剛体がどちらを向いていても $\vec{T}=gm\vec{G}\times\hat{e}_z$）

これを積分すれば

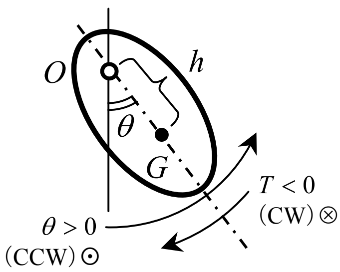
$$\vec{T}=\int\vec{r}\times\hat{e}_z\, g\rho\, d\upsilon=g\underbrace{\left(\int\vec{r}\rho\, d\upsilon\right)}_{m\vec{G}}\times\hat{e}_z=g\,m\vec{G}\times\hat{e}_z$$

となる。但し、$\vec{G}$ は重心位置である。

ここで、θ を重心と z 軸のなす角、OG 長を h とすると、
$\vec{T}$ の方向を、回転軸に平行で、
CCW（反時計まわり⊙）を正に取れば、

$$T=\left|gm\vec{G}\right|\left(-\sin\theta\right)=-mgh\sin\theta$$ と書ける。

注）$\theta>0\,(\mathrm{CCW})\rightarrow T<0\,(\mathrm{CW})$
　　$\theta<0\,(\mathrm{CW})\rightarrow T>0\,(\mathrm{CCW})$



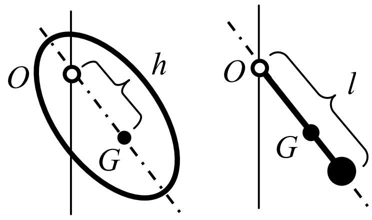
θ と T の方向は逆

運動方程式 $\dot{L}=\vec{T}$ 、角運動量 $L=I\omega=I\dot{\theta}$ より、

$$I\ddot{\theta}=-mgh\sin\theta$$

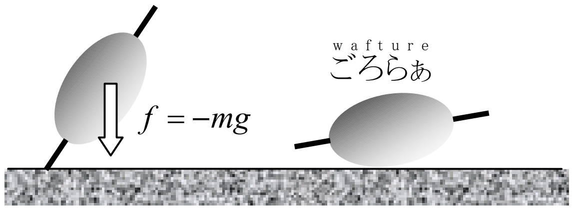
となって、これは $\ddot{\theta}=-\dfrac{g}{l}\sin\theta$ の単振り子と等価である。

$l=I/mh$ を剛体振り子の effective length（有効長）と呼ぶ



剛体振り子は質点の振り子
（単振り子）と等価である

4. コマ（Top）



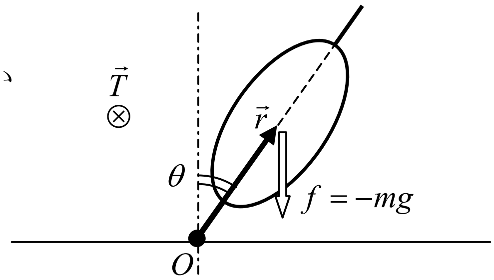
なぜコマは倒れないのだろう。
回転しないコマは倒れてしまう（右図）。
剛体の運動方程式は、

$$\dot{\vec{L}} = \vec{T} \qquad \text{（角運動量の時間変化＝トルク）}$$

であるので、トルクを求めれば、角運動量がどう変化するかがわかるに違いない。
コマの重心 $\vec{r}$ に下向きに重力がかかる（右図）とすると、

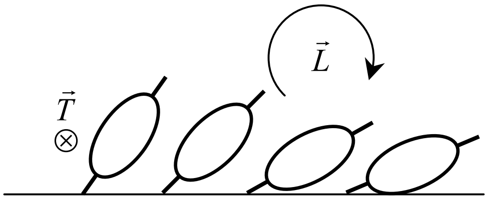
トルクは、 $\vec{T} = \vec{r} \times \vec{f} = mgr\sin\theta$ （方向は紙面に垂直）

である。



コマの軸が地面に接するところを原点とする

【結論】回転していないコマだと、このトルク軸のまわりに、ごろりンと回転して倒れる（*trivial* だ）。



トルクのかかったコマは、トルク軸のまわりに回転し出す＝倒れる

5. 回転しているコマ

コマの運動は、実は大変複雑である。回転軸の方向が複雑に時間変化するからだ。
ここでは、非常に速く自転しているコマを近似的に説明する。

非常に速く自転しているので、何がおきても $\vec{L}$ の大きさはほとんど一定だろうと考える

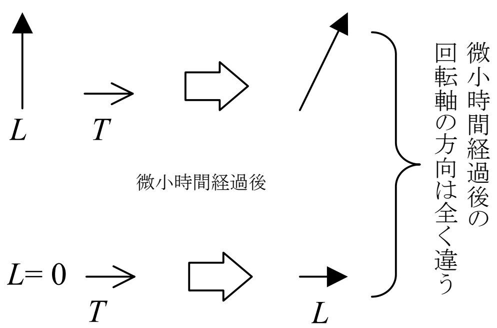
自転の角運動量を $\vec{L}$ としよう。

すると運動方程式 $\dot{\vec{L}} = \vec{T}$ から、

微小時間 δt だけ経過した後の角運動量は、

$$\vec{L}(t + \delta t) = \vec{L}(t) + \vec{T}\delta t$$

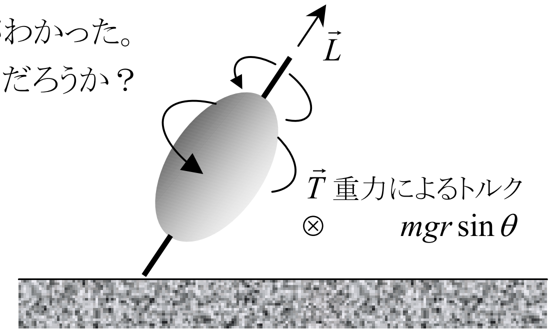
であり、L は、わずかにトルク軸の方向に傾くだけだ。



〔コマが自転していない場合との比較〕
コマが自転していない場合は、もともと $\vec{L} = 0$
だったため、トルクがかかると、直ちに、$\vec{T}$ の方向に
$\vec{L}$ が向いたのだが、高速で自転している場合は、
もとも $\vec{L}$ が大きいため、回転軸方向がわずかに変化するだけなのだ。

6. トルクの時間変化

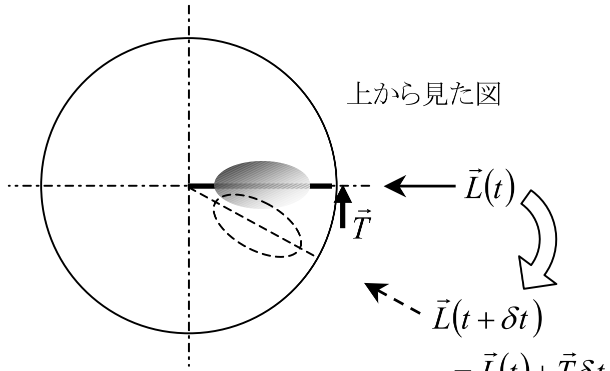
コマを倒そうとするトルクによって、自転しているコマは倒されず、
自転軸方向＝角運動量ベクトルが少しだけずれることがわかった。
それでは、自転軸が少しずれたその後は一体どうなるのだろうか？
自転軸が xy 面で廻ると、右図に示すように、
トルク軸の方向も廻って行き、常に自転軸
と垂直になっている。



よって、角運動量ベクトル(自転軸)は、
いつまでも xy 面内を廻り続けることがわかる。
これを

「歳差運動(さいさうんどう)(precession)」

という。



自転するコマは、重力によって倒されようとする
トルクによって、軸の方向がわずかに変化する

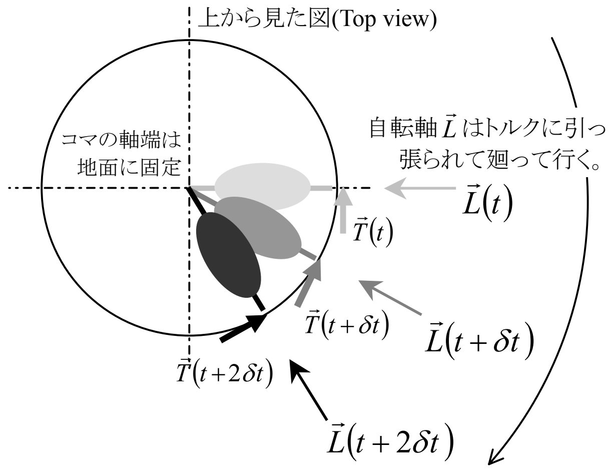
$d\vec{L}=\vec{L}(t+\delta t)-\vec{L}(t)=\vec{T}\delta t$ であるから、

$d\vec{L}$ の方向は水平で円周に平行で、
大きさは、$L\sin\theta\,\delta\varphi=\underbrace{mgr\sin\theta}_{T}\delta t$

　但し、θ は傾き角で $\delta\varphi$ は水平面内での角度。
以上より、もし自転軸が慣性主軸と平行なら、
（$\vec{L}=I\vec{\omega}$ で I がスカラー）

$$\therefore \frac{d\varphi}{dt}=\frac{mgr}{L}=\frac{mgr}{I\omega}$$

・大きな重力だと、速く歳差運動する。
・自転が速いと、速く歳差運動する。
・傾き角 θ に依らない速さで歳差運動する。



トルク $\vec{r}\times\vec{f}$ も時間とともに回転して、
常に回転軸と垂直になっている

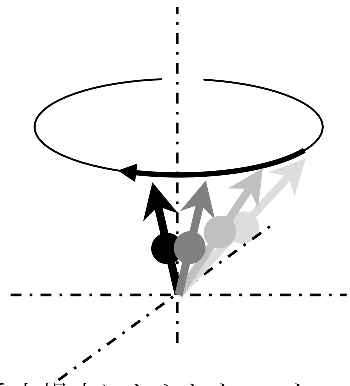
【注】今日の計算は、自転の角運動量が大きい場合の近似。
この近似が成り立たなくなる(コマの自転が遅くなる)と、自転軸の方向がふらふらしだす。
これを「章動(nutation)」という。

7. スピンの歳差運動
多くの素粒子は角運動量を持っている。電子、陽子、中性子、光子は、どれも「自転」している。
この自転を spin といって、誰に廻されたものでもなく、宇宙が出来たときからずっと廻り続けている。
電荷を持った粒子が自転すると磁石になる(=これを、磁気モーメント、と言う)。
自転している磁石に磁場をかけるとどうなるだろうか？

磁石は磁場の方向に向きたがるので、トルクが発生し、自転軸の方向が変えられる。
結果として、重力場中のコマと全く同じ『歳差運動』をするのだ。

【注意】自転していない磁石に磁場をかけると、単なる剛体振り子でふらふらするだけだ。
方位磁石が北の方向を指してふらふらするようすを思い出そう。

実は、このスピンの歳差運動は、現代社会に無くてはならないものになっている。
(それほどでもないかも知れないが、、、)



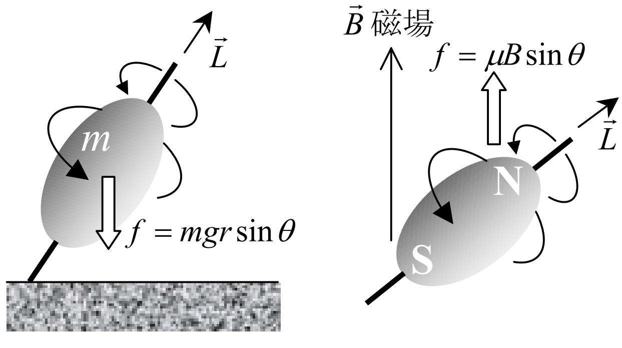
重力場中におかれたコマも、
磁場中におかれたスピンも
同じように歳差運動をする。
(自転軸方向が廻って行く)

歳差運動の角速度ω が磁場の強さに比例
するので、この角速度を測定することで、
物質内部の磁場の強さがわかるのだ。
(原子核は物質の中にあるから)

これを NMR という。
NMR は、

- 人体の中の磁場＝MRI (CT スキャン)
- 薬品の分子の中の磁場＝化学分析、新薬開発
- 爆薬に含まれる化合物の検出＝地雷探知(プラスチック爆弾の検出)
- DNA 分子の中の磁場＝ゲノム解析
- 超伝導体や磁性体の中の磁場＝新材料開発

を調べることなどに使われている。



重力場中のコマと、磁場中のスピン。
どちらも自転軸の方向を変えるような
トルクが働くので、歳差運動をする。