極座標の復習〔改訂版〕

イ）二次元 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$

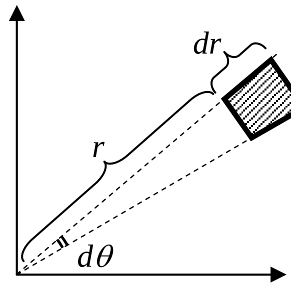
注意）但し、r, θ は時間の関数。つまり、$r = r(t)$ 及び $\theta = \theta(r)$ であることを認識して以下の問題に挑戦。

【例1】点 $(x, y) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ は極座標で書くと何か。　解）$(r, \theta) = (1, \pi/4)$

【例2】点 $(r, \theta) = (\sqrt{2}, 3\pi/2)$ は、デカルト座標で言うとどこか？　解）$(x, y) = (0, -\sqrt{2})$

【例3】x, y を時間微分してみよう。解）$\dot{x} = \frac{dr}{dt}\cdot\cos\theta + r\cdot\left(\frac{d}{dt}\cos\theta\right) = \dot{r}\cos\theta + r\cdot(-\sin\theta)\cdot\dot{\theta}$、$\dot{y}$ は略。

$\sin\theta$ の時間微分の計算は、$\frac{d}{dt}(\cos f(t)) = \frac{d}{df}(\cos f(t))\cdot\frac{df}{dt}$　(chain rule）を使う。



【問題1】速度ベクトル $(\dot{x}, \dot{y})$ の絶対値の自乗を求めよう。ヒント）$\dot{x}^2 + \dot{y}^2$　を計算すれば二つの項になる。

【問題2】$y = r\sin\theta$ を時間で二回微分してみよう。

ヒント　最終的に四つの項になる。

【問題3】右図を参考にして、ハッチング（斜線）された四角形の面積を、○○$dr\,d\theta$ という形で求めよう。$dr, d\theta$ が極めて小さい場合、四角形は近似的に長方形とみなせる。

ロ）三次元 $x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta$　　　　注）φ, ϕ はどちらもファイ。ψ がプサイ。

注意）xy 面内の点は $\theta = \frac{\pi}{2}$ で、z 軸上の点が $\theta = 0$ に対応する。

【例4】点 $(x, y, z) = (0,0,1)$ は極座標で書くと何か。　解）$(r, \theta, \varphi) = (1,0,0)$　注）実は φ は何でも良い。

【例5】点 $(x, y, z) = (1,1,\sqrt{2})$ は極座標で書くと何か。　解）$(r, \theta, \varphi) = \left(2, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$

【例6】x, y, z を時間微分して見よう。　解）$\dot{x} = \frac{dr}{dt}\cdot\sin\theta\cos\theta + r\cdot\left(\frac{d}{dt}\sin\theta\right)\cos\varphi + r\cdot\sin\theta\left(\frac{d}{dt}\cos\varphi\right)$

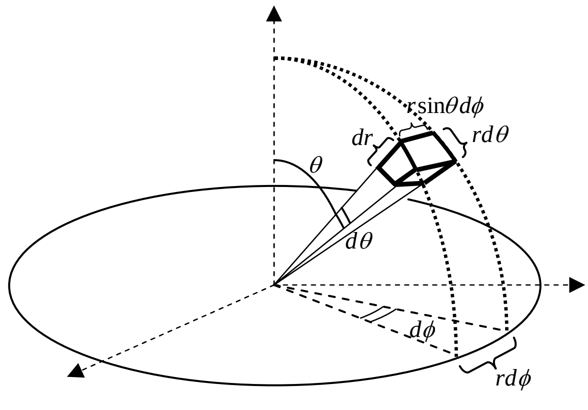
$= \dot{r}\cdot\sin\theta\cos\theta + r\cdot\cos\theta\cdot\dot{\theta}\cdot\cos\varphi - r\cdot\sin\theta\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}$

【例7】$x^2 + y^2 + z^2$ を計算してみよう。　解）r^2

【問題4】速度ベクトル $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ の絶対値の自乗を求めよう。

ヒント）$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$　を計算すれば良い。

ヒント　長い計算はあるが、三つの項に整理される。



【問題5】右図を参考にして、六面体（$dr, d\theta, d\phi$ が小さい場合、近似的に直方体とみなせる）の体積を求めよう。

【問題6】

$$\ddot{x} = \ddot{r}\sin\theta\cos\phi + \dot{r}\dot{\theta}\cos\theta\cos\phi - \dot{r}\dot{\phi}\sin\theta\sin\phi + \dot{r}\dot{\theta}\cos\theta\cos\phi$$
$$+ r\ddot{\theta}\cos\theta\cos\phi - r\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\phi - r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta\sin\phi$$
$$- \dot{r}\dot{\phi}\sin\theta\sin\phi - \dot{r}\ddot{\phi}\sin\theta\sin\phi - r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\phi - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\phi$$

を示し、ラグランジアンがどうして便利なのか説明せよ。　ヒント　$\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \partial/\partial r, \partial/\partial\theta, \partial/\partial\varphi$ の計算と、$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$ の計算とどちらが簡単か想像してみるだけ。

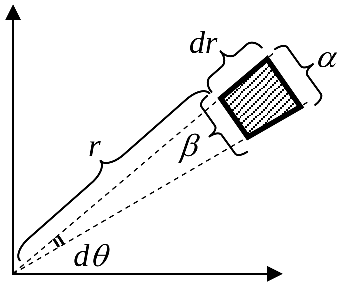
極座標の復習〔略解〕

【問題1】速度ベクトル$(\dot{x},\dot{y})$の絶対値の自乗を求めよう。

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=\left(\dot{r}\cos\theta-r\sin\theta\cdot\dot{\theta}\right)^2+\left(\dot{r}\sin\theta+r\cos\theta\cdot\dot{\theta}\right)^2=\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2$$

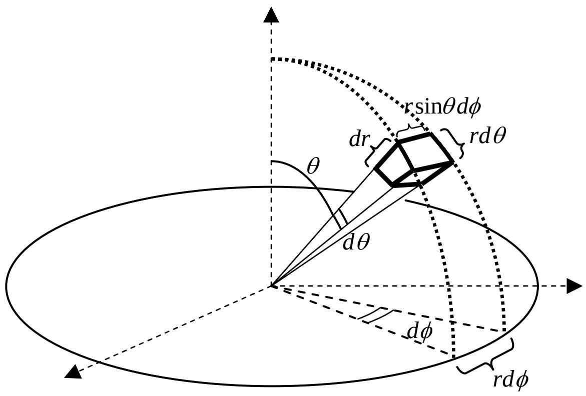
【問題2】$y=r\sin\theta$を時間で二回微分してみよう。 ヒント 最終的に四つの項になる。

$$\ddot{y}=\tfrac{d}{dt}\left(\dot{r}\sin\theta+r\cos\theta\cdot\dot{\theta}\right)=\ddot{r}\sin\theta+2\dot{r}\cos\theta\cdot\dot{\theta}-r\sin\theta\cdot\dot{\theta}^2+r\cos\theta\cdot\ddot{\theta}$$



【問題3】右図を参考にして、ハッチング（斜線）された四角形の面積を、○○$dr\,d\theta$という形で求めよう。$dr,d\theta$が極めて小さい場合、$\beta=rd\theta$及び$\alpha=(r+dr)\cdot d\theta$であるが、微小量の二次以上の項$dr\cdot d\theta$を無視すると、$\alpha=rd\theta$となり、$\alpha=\beta$なので、面積は、$dS=rd\theta dr$と求められる。
使用例

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx\right)^2=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}dy\,e^{-\left(x^2+y^2\right)}=\int_0^{\infty}rdr\int_0^{2\pi}d\theta\,e^{-r^2}=2\pi\int_0^{\infty}\tfrac{1}{2}d\left(r^2\right)e^{-r^2}=\pi\int_0^{\infty}dX\,e^{-X}$$
$$=\pi\left[-e^{-X}\right]_0^{+\infty}=\pi$$



【問題4】速度ベクトル$(\dot{x},\dot{y},\dot{z})$の絶対値の自乗を求めよう。
クロスターム（$(a+b)^2$の$2ab$の項のこと）は、全てキャンセルしてしまい、結果として、$\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2$となる。

【問題5】〔改訂版〕右図を参考にして、六面体（$dr,d\theta,d\phi$が小さい場合、近似的に直方体とみなせる）の体積を求めよう。
右図に示されているとおり、三辺の積から、

$$dV=dr\cdot rd\theta\cdot r\sin\theta\,d\phi=r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi$$

となる。$\sin\theta$が出てくるのは、北極方向に近づくと、ϕまわりのスライス幅が薄くなるから。xy面内では円弧の長さは$rd\phi$であるが、北極付近ではゼロに近づく。

使用例 $\displaystyle\int_{\text{半径}r\text{の球}}dV=\int_0^r r^2dr\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta=\frac{4}{3}\pi r^3$

【問題6】

$$\ddot{x}=\ddot{r}\sin\theta\cos\phi+\dot{r}\dot{\theta}\cos\theta\cos\phi-\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta\sin\phi+\dot{r}\dot{\theta}\cos\theta\cos\phi+r\ddot{\theta}\cos\theta\cos\phi-r\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\phi$$
$$-r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta\sin\phi-\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta\sin\phi-\dot{r}\ddot{\phi}\sin\theta\sin\phi-r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\phi-r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\phi$$

を示し、ラグランジアンがどうして便利なのか説明せよ。
ラグランジアンは、$\dot{x},\dot{y},\dot{z}$という座標の一階微分だけの計算で OK。さらに、ポテンシャルの微分も、微分変数の変換は不要で新しい座標r,θ,ϕでそのまま行えば良いだけ。