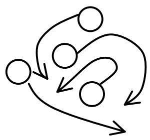
注意これは講義ノートではありません。計算の要点を抜粋しただけのものです。

３-A フェルミ統計・ボース統計・古典統計



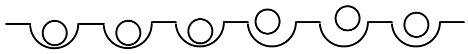
・粒子同士がお互いに触れ合う場合（金属の自由電子、液体 He、中性子星等）

　　Fermi 粒子(半整数スピン) $\langle n_\varepsilon \rangle \equiv f_{\mathrm{F}}(\varepsilon) = 1/\left(e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1\right)$, $f_{\mathrm{F}} = 0 \sim \infty$

　　Bose 粒子(整数スピン) $\langle n_\varepsilon \rangle \equiv f_{\mathrm{B}}(\varepsilon) = 1/\left(e^{\beta(\varepsilon-\mu)}-1\right)$, $f_{\mathrm{B}} = 0 \sim \infty$

・粒子同士が触れ合わない場合（粒子位置が固定されている、または高温で粒子密度が小さい）

　　古典統計： $\langle n_\varepsilon \rangle \propto e^{-\beta\varepsilon}$, $F = -k_{\mathrm{B}} \log Z$



３-B 化学ポテンシャル 〜 いごこちの悪さ(μが大きいとみんな出て行く)

・Fermi 粒子：パウリの排他律のため、粒子は同じ状態(運動量、スピン)を取れない

　　⇒ 粒子を寄せ集めるとμはぐんぐん上がって行く

・Bose 粒子： f_{B}は平均粒子数なので $f_{\mathrm{B}} \geq 0 \Rightarrow e^{\beta(\varepsilon-\mu)} \geq 1$, $\therefore 0 \geq \mu$ ($\varepsilon_{基底状態} = 0$ とした)

　　⇒ 粒子はいつでも集まりやすい (※低温で Bose-Einstein 凝縮—'03 院試)

・高温の場合：粒子密度が小さくなるので、お互いに触れ合わない

　　⇒ 古典統計に一致(古典極限), $f_{\mathrm{F}} \approx f_{\mathrm{B}} \approx e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}$, μ=負になる

３-B-１ 化学ポテンシャルμと粒子数

全粒子数 $N = \sum_j \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_j-\mu)}-1} = \frac{1}{e^{\beta(0-\mu)}-1} + \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_1-\mu)}-1} + \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_2-\mu)}-1} + \cdots$　からμが決まる。

【注】μは温度によって変化する。変わらないと粒子数(の平均)を一定に保てない。

・Bose 粒子：いつでも必ず負(≡粒子は集まりやすい)。低温で$\mu \to 0$となり、上式の和で初項以外の項はすべてゼロ(Bose-Einstein 凝縮)

・Fermi 粒子：低温で正(≡粒子は集まりにくく、無理矢理集めると非常に高いエネルギーになる)。絶対零度でμを Fermi energy と呼ぶ。絶対零度では上式の和は、$\varepsilon_n < \mu$ までの項は= 1, $\varepsilon_n > \mu$ の項は= 0 。

◎和の取り方の注意（次回、「状態密度」のところで詳しく説明する）

・スピン：同じε_jに対して状態は 2S+1 個 ⇒ それぞれ和を取る

・運動量の方向：同じε_jでも方向が異なる状態 ⇒ それぞれ和を取る

３-B-２ 粒子数のゆらぎ

グランドカノニカル集合でμを指定した際の粒子数のゆらぎ(＝標準偏差)

１）まず粒子数の平均$\langle N \rangle = \sum_{i,j} N_j e^{-\beta(E_i-\mu N_j)} / Z_{\mathrm{G}}$ を求める。　但し、$Z_{\mathrm{G}} = \sum_{i,j} e^{-\beta(E_i-\mu N_j)}$

ここで $\frac{\partial \log Z_{\mathrm{G}}}{\partial \mu} = \frac{1}{Z_{\mathrm{G}}}\frac{\partial Z_{\mathrm{G}}}{\partial \mu} = \frac{\beta}{Z_{\mathrm{G}}}\sum_{i,j} N_j e^{-\beta(E_i-\mu N_j)}$ を代入すれば、$\langle N \rangle = k_{\mathrm{B}} T \frac{\partial \log Z_{\mathrm{G}}}{\partial \mu}$

2）次に $\left\langle N^2\right\rangle = \sum_{i,j} N_j^2 e^{-\beta\left(E_i-\mu N_j\right)} \Big/ Z_{\mathrm{G}}$ を求める。

$\dfrac{\partial\langle N\rangle}{\partial\mu} = \dfrac{1}{Z_{\mathrm{G}}^2}\sum_{i,j}\beta N_j^2 e^{-\beta\left(E_i-\mu N_j\right)} Z_{\mathrm{G}} - N_j e^{-\beta\left(E_i-\mu N_j\right)}\dfrac{\partial Z_{\mathrm{G}}}{\partial\mu}$ および $\dfrac{\partial Z_{\mathrm{G}}}{\partial\mu} = Z_{\mathrm{G}}\beta\langle N\rangle$ を使うと、

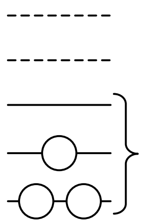
$\dfrac{\partial\langle N\rangle}{\partial\mu} = \dfrac{\beta}{Z_{\mathrm{G}}}\sum_{i,j} N_j^2 e^{-\beta\left(E_i-\mu N_j\right)} - \beta\langle N\rangle^2 = \beta\left(\left\langle N^2\right\rangle - \langle N\rangle^2\right) \equiv \dfrac{\delta N^2}{k_{\mathrm{B}}T}$ を得る。

以上より、粒子数のゆらぎは $\sqrt{\delta N^2} = k_{\mathrm{B}}T\dfrac{\partial\langle N\rangle}{\partial\mu}$ となる。

3）粒子密度を $\rho = \langle N\rangle/V$ と定義すると、$\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial\mu}\right)_T = \dfrac{1}{V}\dfrac{\partial\langle N\rangle}{\partial\mu} = \dfrac{1}{\langle N\rangle/\rho}\cdot\dfrac{\delta N^2}{k_{\mathrm{B}}T}$ となるので、

$\dfrac{\delta N}{\langle N\rangle} = \sqrt{\dfrac{k_{\mathrm{B}}T}{\langle N\rangle\rho}\dfrac{\partial\rho}{\partial\mu}} \propto \dfrac{1}{\sqrt{\langle N\rangle}}$ ……粒子数が多い系(N~N_{Avogadro})ではゆらぎは非常に小さい

3-C　同種粒子のエネルギー準位の占有の仕方



この三つの準位のみを考える

三粒子と三エネルギー準位 (低温では低 E の準位のみを考えればよい)
におけるいろいろな占有状態に対する場合の数を数えて見る

占有数 ＼ 粒子の種類	1 1 1	0 1 2	1 0 2	2 1 0	2 0 1	1 2 0	0 2 1	3 0 0	0 3 0	0 0 3	総数
古典 識別可能粒子	3! =6	$_3C_2$ =3	$_3C_2$ =3	$_3C_2$ =3	$_3C_2$ =3	$_3C_2$ =3	$_3C_2$ =3	$_3C_0$ =1	$_3C_0$ =1	$_3C_0$ =1	27
古典 識別不能粒子	6/3! =1	3/3! =1/2	3/3! =1/2	3/3! =1/2	3/3! =1/2	3/3! =1/2	3/3! =1/2	1/3! =1/6	1/3! =1/6	1/3! =1/6	9/2
Boson 識別不能粒子	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10
Fermion 識別不能粒子	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

- 古典粒子(識別可能)とは、たとえば、固体の中で原子に束縛された電子など、粒子同士がお互いに触れ合わず、かつ、どこに居る粒子か電子顕微鏡で見ればわかるケースに適用される
- 古典粒子(識別不能)とは、高温の希薄なガスなど、滅多にお互いに触れ合わないが、どの粒子か判別は出来ないケースに適用される（統計 I でやった「Gibbs の補正」のために N!で割っている）
- Boson、Fermion はお互いに頻繁に触れあい、かつ、どの粒子か判別できないケースに適用される

※古典粒子(識別不能)と Boson を比べて見ると、Boson の方がエネルギーが低い状態に集まりやすいことがわかる (‘ 02 院試)。