○級数の和による$\sum \frac{1}{n^2}$の求め方

色々な方法があるが、例えば、

$[-1, +1]$の区間について、x^2のフーリエ級数を計算してみると、

$$\int_{-p}^{+p} x^2 e^{ikx} dx = \frac{x^2}{ik} e^{ikx}\Big|_{-p}^{+p} - \frac{2}{ik}\int_{-p}^{+p} x e^{ikx} dx = 0 - \frac{2}{ik}\left(\frac{x e^{ikx}}{ik}\Big|_{-p}^{+p} - \frac{1}{ik}\int_{-p}^{+p} e^{ikx} dx \right)$$

$$= \frac{2(2p)\cdot(-1)}{k^2} + \frac{e^{ikx}}{k^2}\Big|_{-p}^{+p} = -\frac{4p}{k^2} + 0 \quad \text{(虚数部はゼロ)}$$

及び、$k = 0$については、$\int_{-p}^{+p} x^2 dx = \frac{2p^3}{3}$

よって、$x^2 = \frac{1}{2p}\left(\frac{2p^3}{3}\right) + \sum_{k=1} \frac{1}{p}\left(\frac{-4p}{k^2}\right)\cos kx = \frac{p^2}{3} + 4\sum_{k=1} \frac{-\cos kx}{k^2}$

ここで、両辺に$x = p$を代入すれば、$p^2 = \frac{p^2}{3} + 4\sum_{k=1} \frac{-(-1)}{k^2} = \frac{p^2}{3} + 4\sum_{k=1} \frac{1}{k^2}$

$\therefore \frac{p^2}{6} = \sum_{k=1} \frac{1}{k^2}$を得る。

余談：$(x^2 - p^2)^2$について同様な計算を行うと、$\sum_{k} \frac{1}{k^4}$が求まる