注意	途中の計算式や説明が無いもの、出題問題と関係ない解答は採点できません。

二次元調和振動子ポテンシャル中の粒子（スピンゼロ）の状態密度

1. 二次元調和振動子ポテンシャル$U \propto x^2 + y^2$中のスピンゼロの粒子の積分状態密度 $N(e)$を求めましょう。二次元調和振動子の固有エネルギーは$e = \hbar w \cdot \left(n_x + n_y\right)$ で与えられるとします（零点エネルギーは無視）。wは定数、n_x, n_yはゼロまたは正の整数とします。

 ・ヒント：条件を満たすn_x, n_yの個数は直角二等辺三角形の面積です。

2. 前問で求めた積分状態密度 $N(e)$から、状態密度$D(e)$を計算しましょう。

3. 前問で求めた状態密度の表式は実はeが大きくて連続変数と見なせる場合の近似です。eが小さい場合の状態数を、$e/\hbar w =$ 0, 1, 2, 3 について求めましょう。

二次元調和振動子ポテンシャル中のボース粒子（スピンゼロ）

4. 二次元調和振動子ポテンシャル中にN個のボソンがある場合に、Nを状態密度とボース分布関数$\left(e^{b(e-m)} - 1\right)^{-1}$ を用いた積分で表しましょう。但し、化学ポテンシャルをmとします。

5. 問 4の積分を変数変換（$x = be$）し、次に、$Y \equiv e^{-x+bm}$と置いて、テイラー展開 $1/\left(1-Y\right) = 1 + Y + Y^2 + \cdots$ で級数の形に直し、積分を実行しましょう。

 ・ヒント：$\int_0^\infty x e^{-ax} dx = a^{-2}$の公式を使いましょう。

6. 温度を下げて行ったときに問 4の積分が一定値を保てなくなるかどうか調べ、ボースアインシュタイン凝縮が起きるかどうかを説明しましょう。

 ・ヒント：mは負で低温で$m \to 0$になります。また$p^2/6 = 1^{-2} + 2^{-2} + 3^{-2} + \cdots$です。

二次元調和振動子ポテンシャル中のフェルミ粒子（スピン½）

7. 二次元調和振動子ポテンシャル中のN個のフェルミオン（S=½）の状態密度を求めましょう。

8. 絶対零度において、粒子数 N を状態密度とフェルミ分布関数$\left(e^{b(e-m)} + 1\right)^{-1}$を用いた積分で表し、フェルミエネルギー$E_{\mathrm{F}}$を求めましょう。$N$が増えると$E_{\mathrm{F}}$が上がる理由も述べましょう。

9. 絶対零度での平均エネルギーを求め、E_{F}との比を調べて下さい。

10. 化学ポテンシャルの温度変化をTの二次まで求めて下さい。但しゾンマーフェルトの公式は、$g(e) \equiv G'(e)$として、$\int_0^{+\infty} f(e)\, g(e)\, de = -\int_0^{+\infty} f'(e)\, G(e)\, de \approx G(m) + \frac{p^2}{6} G''(m)\, k_{\mathrm{B}}^2 T^2$ です。

 ・ヒント：$m(T) = E_{\mathrm{F}} + AT + BT^2$ とおくと、A=0 でなければないことがわかります。

○お疲れ様でした。コメントをどうぞ（2行程度でお願いします）。