

単位面積の二次元平面(薄い板)に閉じ込められている $S=1$ のスピンを持つ質量 m の N 個の粒子の振る舞いを調べよう。一つの粒子のエネルギーと運動量 $\hbar k$ の関係は $\varepsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ とする。

問1. この粒子の状態密度 $D(\varepsilon)$ を求めよう。

ヒント $(2S+1) \frac{d^2 \vec{k}}{(2\pi)^2} = \dots d\varepsilon$ から考えれば良い。 ε が十分大きい場合の近似でよい。

問2. 温度 T において、化学ポテンシャル μ と、粒子数 N の関係を求めよう。

(解答式は、級数 $N = \sum_{n=1}^{\infty} \dots$ のように和の形でよい)。

ヒント 前問で $D(\varepsilon)$ を求められなかった者は $D(\varepsilon) = A = \text{定数}$ として計算を進めて良い。

問3. 公式 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^n}{n} = \int \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nX^{n-1}}{n} dX = \int \frac{1}{1-X} dX = -\log(1-X)$ を使って前問の級数を計算しよう。

問4. 温度を下げて行くと、化学ポテンシャル μ はどんな値に向かって近づくだろうか。そして粒子数 N を一定に保てなくなる温度が存在するだろうか。注意して議論してみよう。

ヒント $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は発散することに注意。

問5. 弱い磁場 H における磁化 $M \equiv n_+ \mu_B + n_0 \cdot 0 + n_- (-\mu_B)$ を求めよう。但し n_+, n_0, n_- はそれぞれ $S_z = 1, 0, -1$ の占有数で、粒子の磁気モーメントを μ_B とする。但し、化学ポテンシャル μ は H に依存しないとし、解答式には μ が残っていて良いが、和は計算せよ。

ヒント1 n_0 の粒子のエネルギーを ε 、状態密度を $\frac{1}{3} D(\varepsilon)$ とすると、 n_{\pm} の粒子のエネルギーは $\varepsilon_{\pm} = \varepsilon \pm \mu_B H$ 、状態密度は $\frac{1}{3} D(\varepsilon \pm \mu_B H)$ と書ける。

ヒント2 $D(\varepsilon)$ が一定の場合、 $\int_0^{\infty} d\varepsilon (D(\varepsilon - \mu_B H) - D(\varepsilon + \mu_B H)) f(\varepsilon) = \int_{-\mu_B H}^{+\mu_B H} d\varepsilon D(\varepsilon) f(\varepsilon)$

である。また、 x が小さいとき、 $\frac{1}{2}(e^{+x} - e^{-x}) \equiv \sinh(x) \approx x$ である。

問6. M が高温でどう振舞うか調べよう。

コメント(2~3行)、来年度への要望などをどうぞ

解1. $(2S+1) \frac{d^2 \bar{k}}{(2\pi)^2} = 3 \cdot \frac{2\pi k dk}{(2\pi)^2} = \frac{3k}{2\pi} \left(\frac{dk}{d\varepsilon} \right) d\varepsilon = \frac{3k}{2\pi} \left(\frac{d\varepsilon}{dk} \right)^{-1} d\varepsilon = \frac{3m}{2\pi \hbar^2} d\varepsilon$

解2.
$$N = \int_0^\infty d\varepsilon D(\varepsilon) f(\varepsilon) = \frac{3m}{2\pi \hbar^2} \int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{\exp((\varepsilon - \mu)\beta) - 1} = \frac{3m}{2\pi \hbar^2} \int_0^\infty \frac{\exp((- \varepsilon + \mu)\beta) d\varepsilon}{\underbrace{1 - \exp((- \varepsilon + \mu)\beta)}_X}$$

$$= \frac{3m}{2\pi \hbar^2} \int_0^\infty X(1 + X + X^2 + \dots) d\varepsilon = \frac{3m}{2\pi \hbar^2} \int_0^\infty e^{\mu\beta} e^{-\varepsilon\beta} + e^{2\mu\beta} e^{-2\varepsilon\beta} + e^{3\mu\beta} e^{-3\varepsilon\beta} + \dots d\varepsilon$$

$$= \frac{3m}{2\pi \hbar^2} \left(\frac{e^{\mu\beta}}{\beta} + \frac{e^{2\mu\beta}}{2\beta} + \frac{e^{3\mu\beta}}{3\beta} + \dots \right) = \frac{3mk_B T}{2\pi \hbar^2} \sum_{n=1}^\infty \frac{(e^{\mu\beta})^n}{n}$$

解3.
$$N = \frac{3mk_B T}{2\pi \hbar^2} \int dX \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{X^n}{n} \right)' = \frac{3mk_B T}{2\pi \hbar^2} \int dX (1 + X + \dots) = \frac{3mk_B T}{2\pi \hbar^2} \int \frac{dX}{1-X} = \frac{3mk_B T}{2\pi \hbar^2} (-\log(1-X))$$

$$= \frac{3mk_B T}{2\pi \hbar^2} (-\log(1 - e^{\mu\beta}))$$

解4. 和の前の T が小さくなるので、 $e^{\beta\mu}$ が大きくなると N を一定に保てない。そこで、 $\mu \rightarrow -0$ に漸近させれば和はいくらでも大きくなれるので、 T をいくら小さくしても N を一定に保てる。よって、この場合(二次元)は Bose-Einstein 凝縮は起こらない。

解5. $S=1$ のボソンの磁化を求める。

$$M = \mu_B \int_0^\infty d\varepsilon \frac{1}{3} D(\varepsilon - \mu_B H) f(\varepsilon) + 0 \int_0^\infty d\varepsilon \frac{1}{3} D(\varepsilon) f(\varepsilon) - \mu_B \int_0^\infty d\varepsilon \frac{1}{3} D(\varepsilon + \mu_B H) f(\varepsilon)$$

$$= \frac{1}{3} \mu_B \int_0^\infty d\varepsilon (D(\varepsilon - \mu_B H) - D(\varepsilon + \mu_B H)) f(\varepsilon) = \frac{1}{3} \mu_B \int_{-\mu_B H}^{+\mu_B H} d\varepsilon D(\varepsilon) f(\varepsilon) \quad ; \quad D(\varepsilon) \text{一定}$$

$$= \frac{m\mu_B}{2\pi \hbar^2} \int_{-\mu_B H}^{+\mu_B H} \frac{X d\varepsilon}{1-X} = \frac{m\mu_B}{2\pi \hbar^2} \int_{-\mu_B H}^{+\mu_B H} e^{\mu\beta} e^{-\varepsilon\beta} + e^{2\mu\beta} e^{-2\varepsilon\beta} + \dots d\varepsilon \quad ; +(\mu_B H + \mu) < 0 \text{の範囲のみ}$$

$$= \frac{m\mu_B}{2\pi \hbar^2} \left(\frac{e^{\mu\beta}}{-\beta} (e^{-\mu_B H \beta} - e^{+\mu_B H \beta}) + \frac{e^{2\mu\beta}}{-2\beta} (e^{-2\mu_B H \beta} - e^{+2\mu_B H \beta}) + \dots \right)$$

$$= \frac{m\mu_B}{2\pi \hbar^2} \left(\frac{e^{\mu\beta}}{\beta} 2 \sinh(\mu_B H \beta) + \frac{e^{2\mu\beta}}{2\beta} 2 \sinh(2\mu_B H \beta) + \dots \right) \quad ; \text{弱磁場なので展開}$$

$$\approx \frac{m\mu_B^2 H}{\pi \hbar^2} (e^{\mu\beta} + e^{2\mu\beta} + \dots) = \frac{m\mu_B^2 H}{\pi \hbar^2} \left(\frac{1}{1 - e^{\mu\beta}} - 1 \right)$$

解6. 問3の結果 $N = \frac{3mk_B T}{2\pi \hbar^2} (-\log(1 - e^{\mu\beta}))$ を上式に代入すると、

$$M = \frac{m\mu_B^2 H}{\pi \hbar^2} \left(e^{2\pi^2 N / 3mk_B T} - 1 \right)$$

高温では確かに、 $M \approx \frac{m\mu_B^2 H}{\pi \hbar^2} \frac{2\pi \hbar^2 N}{3mk_B T} = N \frac{2\mu_B^2 H}{3k_B T}$ と Curie 則が出る。

注) 低温で M が発散してしまうように見えるのは $+(\mu_B H + \mu) < 0$ の条件が満たされなくなったので式が使えないということを意味している。