統計力学 II（2007）試験問題

試験日 2 月 1 日　時間 09:15-10:45　教室 9-249　科目名　統計力学 II　担当　後藤（3-335B）

【注意】途中の計算を必ず書け。結果だけの解答は採点出来ない。A4 手書メモ 1 枚持込可。

1. 三次元の箱に入った自由電子のフェルミ波数 k_{F} を求めよ。但し、単位体積あたりの電子数を n とする。次に、この k_{F} を使い、フェルミ波長、フェルミ運動量、フェルミ速度、フェルミエネルギー、フェルミ周波数、フェルミ温度、の各式を表せ。ヒント―スピン自由度は 2 だ。

---

2. 分散関係 $\varepsilon = \upsilon_0 |p|$ を持つスピン½の粒子が、長さ L の細線に閉じ込められている。単位長さあたりの粒子数を n として、状態密度 D_0 とフェルミ波数 k_{F} 及びフェルミエネルギ ε_{F} を計算式を示して求めよ。
ヒント― 粒子数保存の式 $nL = \int_0^{\varepsilon_{\mathrm{F}}} D_0 \, d\varepsilon$ から k_{F} や ε_{F} が求まる。それから、この問題ではエネルギーと波数 $k = p/\hbar$ の関係に注意せよ。スピンに加え、進行方向の自由度も（$\pm p$ のいずれの粒子も同じエネルギ ε を持つ）存在することも忘れるな。

3. 前問の結果を使って化学ポテンシャル μ の温度依存性を求めよ。
ヒント―粒子数保存の式 $nL = D_0 \int_0^\infty \dfrac{d\varepsilon}{e^{(\varepsilon-\mu)\beta}+1}$ や、変数変換 $e^{(\varepsilon-\mu)\beta} = z$、そして 部分分数分解の公式 $\dfrac{1}{(z+1)z} = \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{z+1}$ などを使え。

4. 化学ポテンシャルの温度依存性をグラフに描け。そして $k_{\mathrm{B}}T$ が0から $\frac{1}{2}\varepsilon_{\mathrm{F}}$ まで変化したときに、 μ が大体何％くらいずれるか評価せよ（有効数字1桁で良い）。ヒント― $e \approx 2.7$ である。

5. 内部エネルギー E の温度依存性をゾンマーフェルトの公式で計算し、比熱 $C = \partial E/\partial T$ も求めよ。

---

6. 体積 V の三次元の箱に閉じ込められた N 個のスピンゼロのボソンについてボースアインシュタイン凝縮が起きるかどうか考えよう。状態密度は $D(\varepsilon) = A\sqrt{\varepsilon}$ で与えられるとする。但し $A = V\, m^{3/2} \big/ \sqrt{2}\, \pi^2 \hbar^3$ である。温度を下げて行くと、μ はどのように変化するか説明せよ。
ヒント ― 粒子数保存の式 $N = \int_0^\infty \dfrac{D(\varepsilon)d\varepsilon}{e^{(\varepsilon-\mu)\beta}-1} = \dfrac{A\sqrt{\pi}}{2\beta^{3/2}} \sum_{n=1\sim\infty} \dfrac{\left(e^{\beta\mu}\right)^n}{n^{3/2}}$ や、ツェータ関数の定義 $\zeta(z) = \sum_{n=1\sim\infty} n^{-z}$ を使え。そして解答がヒントとしてほとんど与えられていることに感謝せよ。

7. 前問で、積分から求めた粒子数 $N = \int_0^\infty \dfrac{D(\varepsilon)d\varepsilon}{e^{(\varepsilon-\mu)\beta}-1}$ の値が保存される限界の温度 T_{C} と、N との関係を求めよ。

8. 熱エネルギー $\varepsilon = k_{\mathrm{B}}T$ でランダム運動する粒子は、運動量の不確定性 $\delta p = \sqrt{2m\varepsilon}$ を持つ。すると、不確定性原理 $\delta x \delta p \approx h$ から、この粒子の座標の不確定性は $\delta x = h\big/\sqrt{2mk_{\mathrm{B}}T}$ と求められる。
この δx と、前問で得た T_{C} と N との関係式から求めた粒子の平均間隔 $a = (V/N)^{1/3}$ を比較し、ボースアインシュタイン凝縮が起きる条件について述べよ。
ヒント ― 素直に a に T_{C} を代入して比較するだけだ。実は、a と δx は同じ程度の大きさになる。

感想をどうぞ。

統計力学 II（2007）試験問題略解

試験日 2 月 1 日　時間 09:15-10:45　教室 9-249　科目名　統計力学 II　担当　後藤（3-335B）

1. $k_{\mathrm{F}} = \sqrt[3]{3\pi^2 n}$, $\varepsilon_{\mathrm{F}} = \dfrac{\hbar^2 k_{\mathrm{F}}^2}{2m}$, $T_{\mathrm{F}} = \dfrac{\varepsilon_{\mathrm{F}}}{k_{\mathrm{B}}}$, $\nu_{\mathrm{F}} = \dfrac{\varepsilon_{\mathrm{F}}}{h}$, $p_{\mathrm{F}} = \hbar k_{\mathrm{F}}$, $\lambda_{\mathrm{F}} = \dfrac{2\pi}{k_{\mathrm{F}}}$, $\upsilon_{\mathrm{F}} = \dfrac{\hbar k_{\mathrm{F}}}{m}$

2. $$(2S+1)L\frac{dk}{2\pi} = \frac{2L}{2\pi}2\frac{dk}{d\varepsilon}d\varepsilon = \frac{2L}{\pi}\frac{dp}{\hbar d\varepsilon}d\varepsilon = \frac{2L}{\pi}\frac{1}{\hbar}\upsilon_0^{-1}d\varepsilon = \underbrace{\frac{2L}{\hbar\pi\upsilon_0}}_{D_0}d\varepsilon$$

$nL = \int_0^{\varepsilon_{\mathrm{F}}} D_0\,d\varepsilon = \dfrac{2L}{\pi\hbar\upsilon_0}\varepsilon_{\mathrm{F}} = \dfrac{2L}{\pi\hbar\upsilon_0}\upsilon_0(\hbar k_{\mathrm{F}}) = \dfrac{2L}{\pi}k_{\mathrm{F}}$　より、$k_{\mathrm{F}} = \pi n/2$, $\varepsilon_{\mathrm{F}} = \upsilon_0 p = \upsilon_0\hbar\pi n/2$

3. $$nL = D_0\int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{\underbrace{e^{(\varepsilon-\mu)\beta}}_{z}+1} = D_0\int_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=\infty}\frac{1}{z+1}\frac{d\varepsilon}{dz}dz = D_0\int_{z=e^{-\mu\beta}}^{z=\infty}\frac{1}{z+1}\left(\frac{1}{\beta z}\right)dz = \frac{D_0}{\beta}\int\frac{dz}{(z+1)z}$$

$$= \frac{D_0}{\beta}\int\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}\right)dz = \frac{D_0}{\beta}\left(\log z - \log(z+1)\right)_{z=e^{-\mu\beta}}^{z=\infty} = \frac{D_0}{\beta}\left(\log\frac{z}{z+1}\right)_{z=e^{-\mu\beta}}^{z=\infty}$$

$$= \frac{D_0}{\beta}\left(\log 1 - \log\frac{e^{-\mu\beta}}{e^{-\mu\beta}+1}\right) = \frac{D_0}{\beta}\left(\log\frac{e^{-\mu\beta}+1}{e^{-\mu\beta}}\right) = \frac{D_0}{\beta}\log\left(1+e^{\mu\beta}\right)$$

$\therefore e^{nL\beta/D_0} = 1 + e^{+\mu\beta}$

$\therefore \mu = k_{\mathrm{B}}T\log\left(e^{nL/D_0 k_{\mathrm{B}}T} - 1\right)$

前問の結果より、$nL = D_0\,\varepsilon_{\mathrm{F}}$ であるから $\mu = k_{\mathrm{B}}T\log\left(e^{\varepsilon_{\mathrm{F}}/k_{\mathrm{B}}T} - 1\right)$

4. 低温では確かに $\mu \approx k_{\mathrm{B}}T\log\left(e^{\varepsilon_{\mathrm{F}}/k_{\mathrm{B}}T}\right) = \varepsilon_{\mathrm{F}}$ になる。

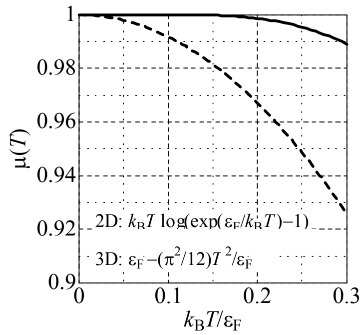
もう少し近似を上げると、$\mu = k_{\mathrm{B}}T\log\left(e^{-\varepsilon_{\mathrm{F}}/k_{\mathrm{B}}T}\left(1 - e^{-\varepsilon_{\mathrm{F}}/k_{\mathrm{B}}T}\right)\right) = \varepsilon_{\mathrm{F}} + k_{\mathrm{B}}T\log\left(1 - e^{-\varepsilon_{\mathrm{F}}/k_{\mathrm{B}}T}\right)$

ここで $\log(1-x) \approx -x\cdots$ であるから、$\mu \approx \varepsilon_{\mathrm{F}} - k_{\mathrm{B}}Te^{-\varepsilon_{\mathrm{F}}/k_{\mathrm{B}}T}$

絶対零度での勾配は $\partial\mu/\partial T = \left(-k_{\mathrm{B}} - \varepsilon_{\mathrm{F}}/T\right)e^{-\varepsilon_{\mathrm{F}}/k_{\mathrm{B}}T} \approx 0\,(T \to 0)$ なので原点では水平。

$k_{\mathrm{B}}T = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{\mathrm{F}}$ とすると、$\mu = \varepsilon_{\mathrm{F}} - \tfrac{1}{2}\varepsilon_{\mathrm{F}}e^{-2}$ となって 6～7％くらいしかずれない。

【注意】実は二次元では低温では殆ど変化しないのだ！



5. $E = D_0\int_0^\infty \dfrac{\varepsilon\,d\varepsilon}{e^{(\varepsilon-\mu)\beta}+1}$ であるから、これに公式

$$\int_0^{+\infty} f(\varepsilon)g(\varepsilon)d\varepsilon = G(\mu) + G''(\mu)\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} - f'(\varepsilon)\,\tfrac{1}{2}(\varepsilon-\mu)^2\,d\varepsilon}_{=\frac{\pi^2}{6}(k_{\mathrm{B}}T)^2} - \cdots$$

を当てはめれば、$E \approx D_0\dfrac{\mu^2}{2} + D_0\dfrac{\pi^2}{6}(k_{\mathrm{B}}T)^2$, $C \approx \dfrac{\pi^2}{3}D_0 k_{\mathrm{B}}^2 T$

注意）$\mu = \varepsilon_{\mathrm{F}} + k_{\mathrm{B}}Te^{-\varepsilon_{\mathrm{F}}/k_{\mathrm{B}}T}$ は、低温ではほとんど定数であることに注意。

6. β を大きくして行くと $\mu < 0$ なので和の中身はどんどん小さくなる。これに対抗して N を一定に保つために、$\mu \to 0$ と変化する。

7. 限界点では $\mu = 0$ であり、そこでは、$N = \dfrac{A\sqrt{\pi}}{2\beta_{\mathrm{c}}^{3/2}}\zeta(\tfrac{3}{2}) = \dfrac{V\,m^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2\,\hbar^3}\dfrac{\sqrt{\pi}\,(k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{C}})^{3/2}}{2}\zeta(\tfrac{3}{2})$

$$=V\left(\frac{mk_B T_C}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}\zeta\left(\tfrac{3}{2}\right)$$ であるので、

$$\therefore \frac{N}{V}=\left(\frac{mk_B T_C}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}\zeta\left(\tfrac{3}{2}\right)$$

8. $a=\left(\dfrac{V}{N}\right)^{1/3}=\left(\dfrac{mk_B T_C}{2\pi\hbar^2}\right)^{-1/2}\zeta\left(\tfrac{3}{2}\right)^{1/3}=\dfrac{\sqrt{2\pi}\hbar}{\sqrt{mk_B T_C}}\zeta\left(\tfrac{3}{2}\right)^{1/3}=\dfrac{h}{\sqrt{2\pi mk_B T_C}}\zeta\left(\tfrac{3}{2}\right)^{1/3}$

となって $\delta x=h\big/\sqrt{2mk_B T}$ とほとんど同じ。よって、粒子の波動関数の広がり δx が温度を下げると大きくなって行って、隣の粒子に達したところでボースアインシュタイン凝縮が起こる。