統計力学 II（2008）試験問題・略解

試験日 1 月 30 日　時間 09:15-10:45　教室 3-348　科目名　統計力学 II　担当　後藤（3-335B）

【注意】途中の計算を必ず書こう。結果だけの解答は採点出来ない。A4 手書メモ 1 枚持込可。

1. 長さ L の細線に閉じ込められた電子の状態密度が $\dfrac{L\sqrt{2m}}{\pi\hbar}\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ となることを示そう。

【略解】分散関係 $\varepsilon=\dfrac{\hbar^2k^2}{2m}$ より、$d\varepsilon=\dfrac{\hbar^2k}{m}dk$

状態密度は、電子の運動方向（左・右）とスピンを考慮して、

$$2\cdot L\cdot\frac{2dk}{2\pi}=\frac{2L}{\pi}\frac{dk}{d\varepsilon}d\varepsilon=\frac{2L}{\pi}\frac{m}{\hbar^2k}d\varepsilon=\frac{2Lm}{\pi\hbar^2\sqrt{\frac{2m\varepsilon}{\hbar^2}}}d\varepsilon=\underbrace{\frac{L\sqrt{2m}}{\pi\hbar\sqrt{\varepsilon}}}_{D(\varepsilon)}d\varepsilon$$

2. 続いてフェルミエネルギー ε_{F} 及びフェルミ波数 k_{F} を求めよう。

【略解】 絶対零度では $N=\int_0^{\varepsilon_{\mathrm{F}}}D(\varepsilon)d\varepsilon=\dfrac{L\sqrt{2m}}{\pi\hbar}\int_0^{\varepsilon_{\mathrm{F}}}\dfrac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\quad=\dfrac{L\sqrt{2m}}{\pi\hbar}2\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{F}}}$

よって、$\varepsilon_{\mathrm{F}}=\left(\dfrac{\pi\hbar}{2\sqrt{2m}}\dfrac{N}{L}\right)^2$　さらに、$\dfrac{\hbar k_{\mathrm{F}}}{\sqrt{2m}}=\dfrac{\pi\hbar}{2\sqrt{2m}}\dfrac{N}{L}$, $\therefore k_{\mathrm{F}}=\dfrac{\pi N}{2L}$ ～粒子間隔の逆数程度

※粒子数 N を書き忘れていたので板書で追加しました。

3. 続いて化学ポテンシャル μ の低温での温度依存性を求めよう。

ヒント—Sommerfeld の公式 $\int_0^{+\infty}f(\varepsilon)g(\varepsilon)d\varepsilon=G(\mu)+\frac{\pi^2}{6}(k_{\mathrm{B}}T)^2G''(\mu)+\cdots$ を使い、

さらに　$\mu=\varepsilon_{\mathrm{F}}+\Delta\mu$ とおいて $\Delta\mu$ は非常に小さいとして展開してみよう。

【略解】粒子数保存の式より、$N=\int_0^{\infty}D(\varepsilon)f(\varepsilon)d\varepsilon$ に対して、$g\equiv D$, $G=\int_0^{\mu}D\,d\varepsilon$ とおけば、

$\therefore N\approx G(\mu)+\dfrac{\pi^2}{6}(k_{\mathrm{B}}T)^2D'(\mu)$　となるから、$\mu=\varepsilon_{\mathrm{F}}+\Delta\mu$ を代入すると、

$$=G(\varepsilon_{\mathrm{F}}+\Delta\mu)+\frac{\pi^2}{6}(k_{\mathrm{B}}T)^2D'(\varepsilon_{\mathrm{F}}+\Delta\mu)=\underbrace{G(\varepsilon_{\mathrm{F}})}_{N}+\underbrace{G'(\varepsilon_{\mathrm{F}})}_{D(\varepsilon_{\mathrm{F}})}\Delta\mu+\frac{\pi^2}{6}(k_{\mathrm{B}}T)^2\left(D'(\varepsilon_{\mathrm{F}})+D''(\varepsilon_{\mathrm{F}})\Delta\mu\right)$$

ここで、$N = G(\varepsilon_{\mathrm{F}})$及び、上式の最後の項は温度の高次のべきになることに注意して、

$$= N + D(\varepsilon_{\mathrm{F}})\Delta\mu + \frac{\pi^2}{6}(k_{\mathrm{B}}T)^2 D'(\varepsilon_{\mathrm{F}}) + O(T^3)$$

$$\therefore \Delta\mu = -\frac{\pi^2}{6}(k_{\mathrm{B}}T)^2 \frac{D'(\varepsilon_{\mathrm{F}})}{D(\varepsilon_{\mathrm{F}})}$$

ここで、一次元では先ほど求めたように$D(\varepsilon) = \dfrac{B}{\sqrt{\varepsilon}}$なのであるから、$D'(\varepsilon) = -\dfrac{B}{2\varepsilon^{3/2}}$

$$\therefore \mu = \varepsilon_{\mathrm{F}} + \frac{\pi^2}{6}(k_{\mathrm{B}}T)^2 \frac{B}{2\varepsilon_{\mathrm{F}}^{3/2}} \Bigg/ \frac{B}{\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{F}}}} = \varepsilon_{\mathrm{F}} + \frac{\pi^2 (k_{\mathrm{B}}T)^2}{12\varepsilon_{\mathrm{F}}}$$

一次元では、化学ポテンシャルは温度を上げると増えるのだ。理由は、高エネルギーの方が状態密度が小さいため、入りにくくなるからである。

4. 面積 A の平面に閉じ込められた光子のエネルギー密度$u(\varepsilon) = D(\varepsilon) f_{\mathrm{B}}(\varepsilon)$を求めよう。

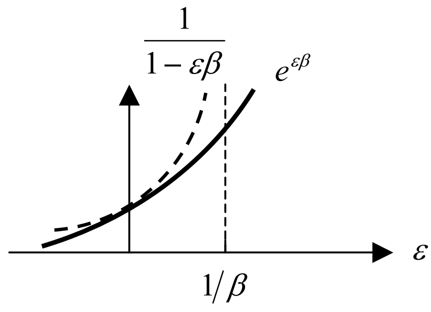
【略解】分散関係は$\varepsilon = c\hbar k$であるから、微分は$d\varepsilon = c\hbar dk$　であり、さらに、

偏波方向によるモード数 2 に気をつけて、

$$2A \cdot \frac{d^2k}{(2\pi)^2} = 2A \cdot \frac{2\pi k dk}{(2\pi)^2} = \frac{Akdk}{\pi} = \frac{Ak}{\pi}\frac{dk}{d\varepsilon}d\varepsilon = \frac{k}{\pi}\frac{A}{c\hbar}d\varepsilon = \frac{\varepsilon/c\hbar}{\pi}\frac{A}{c\hbar}d\varepsilon = \frac{A\varepsilon}{\pi(c\hbar)^2}d\varepsilon$$

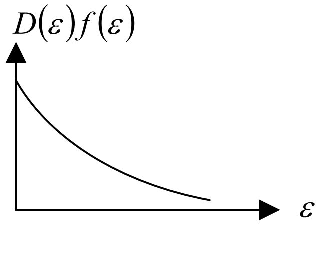
光子の化学ポテンシャルはゼロなのでエネルギー密度は、$u(\varepsilon, T) = \dfrac{A\varepsilon}{\pi(c\hbar)^2}\dfrac{1}{e^{\varepsilon\beta} - 1}$

※エネルギー密度と言いながら、ε が書いていませんでしたので、$u(\varepsilon) = D(\varepsilon) f_{\mathrm{B}}(\varepsilon)$を計算した人も$\varepsilon D(\varepsilon) f_{\mathrm{B}}(\varepsilon)$を計算した人もどちらも正解にします。



5. 上問で、$\varepsilon \to 0$ 及び $\varepsilon \to \infty$ にした場合の極限ではどのような関数に漸近するか？

ヒント―　$u(\varepsilon)$の ε 依存性を、$u(0) \sim$ 定数、$u(\infty) \sim 0$ より、もう少し詳しく求めよ。



【略解】$\varepsilon \to 0$ で $u \propto \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon\beta + (\varepsilon\beta)^2} \propto \dfrac{1}{1+\varepsilon\beta}$ 、 $\varepsilon \to \infty$ で $u \propto \dfrac{1}{e^{\varepsilon\beta}}$

6. $u(\varepsilon)$ をグラフにして見よう。極値があるかどうかに注意しよう。

【略解】$\dfrac{\partial u}{\partial \varepsilon} \sim e^{\varepsilon\beta} - 1 - \varepsilon\beta\, e^{\varepsilon\beta} = 0$ より、極値となる条件は $e^{\varepsilon\beta} = \dfrac{1}{1-\varepsilon\beta}$

両辺をグラフにすると、右上図のように、$\varepsilon = 0$ でのみ成立しそう。

しかし、$\varepsilon = 0$ では分母もゼロになるので、結局 $\dfrac{\partial u}{\partial \varepsilon}(0) \neq 0$ である。

よって、右下図のように、$\varepsilon = 0$ から有限の勾配で単調減少する。

7. 電子が通常の $\varepsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ ではなく、$\varepsilon = \sqrt{\Delta^2 + \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m}\right)^2}$ という分散関係を持つとしよう。

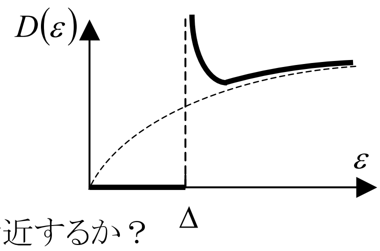
ここで Δ は正の定数、m は電子の質量であり、電子は三次元空間を運動するものとする。

単位体積あたりの状態密度を求め、$\varepsilon > \Delta$ の範囲でグラフに描いてみよう。

【略解】$d\varepsilon = d\sqrt{\Delta^2 + \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m}\right)^2} = \dfrac{1}{2\varepsilon} d\left(\dfrac{\hbar^4 k^4}{4m^2}\right) = \dfrac{\hbar^4}{2m^2}\dfrac{k^3 dk}{\varepsilon}$ より、$\dfrac{dk}{d\varepsilon} = \dfrac{2m^2\varepsilon}{\hbar^4 k^3}$

$$\therefore (2S+1)\frac{d^3k}{(2\pi)^3} = 2\cdot\frac{4\pi k^2}{8\pi^3}\frac{dk}{d\varepsilon}d\varepsilon = \frac{k^2}{\pi^2}\frac{2m^2\varepsilon}{\hbar^4 k^3}d\varepsilon = \frac{1}{\pi^2}\frac{2m^2\varepsilon}{\hbar^4 k}d\varepsilon = \frac{2m^2\varepsilon}{\pi^2\hbar^4}\frac{1}{\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}\sqrt{\varepsilon^2-\Delta^2}}}d\varepsilon$$

$$= \frac{\sqrt{2m^3}}{\pi^2\hbar^3}\frac{\varepsilon\, d\varepsilon}{(\varepsilon^2-\Delta^2)^{1/4}}$$



8. 上問で、$\varepsilon \to \infty$ の領域では状態密度はどのような関数形に漸近するか？

【略解】上問の結果より直ちに、$D(\varepsilon \to \infty) \approx \dfrac{\sqrt{2m^3\varepsilon}}{\pi^2\hbar^3}$ であり、通常の三次元金属の状態密度である。

落ち着いて考えれば、$\varepsilon \to \infty$ では分散の式は、

$\varepsilon \approx \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m}\right)^2} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ であり、自由電子の分散と一致しているのだ。

※お察しの通り、超伝導状態の電子にヒントを得て作題しましたが、超伝導の準粒子は、フェルミエネルギーをエネルギーの原点 $\varepsilon = 0$ にとり、ε の範囲は正負両側です。