「女子中高生夏の学校 2009」実習 J

「作図から始まる発見体験」

2009-08-14
日本数学会
角皆 宏 (つのがい ひろし)
上智大学理工学部情報理工学科・准教授

0 はじめに

自然現象を観察・解明するのが「自然科学」、社会現象を観察・解明するのが「社会科学」とするなら、数理現象を観察・解明するのが「数学 (数理科学)」です。既に出来上がった理論を学んだり、与えられた問題の解答を求めようとしたりする前に、数や図形など数学の世界に生きている対象の振る舞いやそれらが引き起こす様々な現象を、観察することから始めましょう。

この実習では主に図形の振る舞いに触れます。思いがけない発見はあるでしょうか。

1 定規とコンパスとを用いて作図をしよう

人類は昔から色々な道具を用いて様々な図形を描いてきました。古代エジプトでは、毎年起こるナイル川の氾濫の後に土地を測り直す必要から、等間隔に結び目を作って目盛を付けた縄を用いて、直角を作ったり、土地の周囲を測って面積を計算したりすることが発達したと言われています。その後の古代ギリシャでは、円と直線とのみが完全な図形である、と考えられていたからか、定規とコンパスとのみで様々な図形を作図することが盛んに研究されました。

この実習でも、様々な図形が引き起こす数理現象に触れる第一歩として、定規とコンパスとによる作図から始めましょう。

1.1 作図問題のルール

まずゲームのルールの説明です。道具を限定する、ということは、行なっても良い操作の範囲を明確に定める、ということです。古典的に「定規とコンパスとによる作図」という場合、与えられた幾つかの点 (とそれから出来る直線や円) から出発して、以下に挙げる操作のみを用いて、条件を満たす点 (とそれから出来る直線や円) を得ることを言います。

- 定規
  - 2 点を結ぶ直線 (充分長い線分) を描く
- コンパス
  - 1 点を中心とし他の 1 点を通る円弧を描く
  - 2 点間の距離 (線分の長さ) を移す
- 点の生成

– 上記の方法で描かれた直線・円弧の交点として点が得られる
– 補助の点を取るのは構わないが、既に描かれた直線・円弧で区切られた同じ領域内にあれば、どこでも通用する (取り方が最終結果に影響しない) 必要がある

1.2　基本作図

以下のような作図は基本的なものとして、もっと複雑な作図の一部に頻繁に現れます。作図出来ますか。

- 1 点を通り直線に垂線を下ろす (立てる)
- 1 点を通り直線に平行線を引く
- 2 点を結ぶ線分の中点・垂直二等分線
- 角の二等分線

1.3　作図して観察しよう

では、幾つかの図形を作図してみましょう。

実習 1.3.1. 始めに 3 点を (任意に) 取って、三角形を作ります。その三角形の外心と外接円とを作図してみましょう。外心は三角形の中にありますか／外にありますか。

実習 1.3.2. 直線とその上にない 1 点を取って、その両者から等距離にある点を幾つか求めてみましょう。どんな風に並んでいるでしょうか。

沢山の三角形について外接円を作図してみると、観察がより確かになり、もっと色々なことが判りそうです。また、直線とその上にない 1 点とから等距離にある点を沢山作図してみると、どのように並んでいるか、かなり予想が付きそうです。しかし、沢山作図するのは手間も掛かって中々大変です。
このように、同じことを沢山繰り返して行なうには、コンピュータが大きな力になります。この後はコンピュータ上で作図をシミュレート出来る幾何学ソフトウェアを用いて、もっと色々な観察を行なっていきましょう。

2　対話的幾何学ソフトウェア KSEG で作図をしよう

KSEG は Ilya Baran 氏が作成した対話型幾何学ソフトウェアです。マウスを用いて画面上に点を打っていき、選んだ点を結ぶ直線を引いたり、中心と 1 点とを選んで円を描いたり、それらの交点を取ったり、つまり「定規とコンパスとによる作図」をシミュレートできます。しかし、それだけでなく、図形を描いた後で出発点となる点を動かすと、その点に依存して描かれた図形が連動して動く様子を見ることができ、更に、その動く軌跡をも描くことが出来るのです。
この KSEG を用いて、先ほどまでに行なった作図をシミュレートして、図形の性質 (特に図形の動き) を更に観察してみましょう。

2.1 基本動作

ごく基本の動作だけをここに挙げて、今日の実習の参考とします。

2.1.1 点の構築

とにかく点を打たなければ始まりません。

1. 自由点を打つ ··· 何もない所で**マウスの右クリック**(この点は自由に動かせる)
2. 線上に点を打つ ··· 既にある曲線 (＝直線 (線分・半直線)・円 (円弧)) の上で**マウスの右クリック**(この点はその線上のみを動かせる)
3. 交点 ··· 2 つの曲線を選択 (次で述べる) →「交点」を実行する

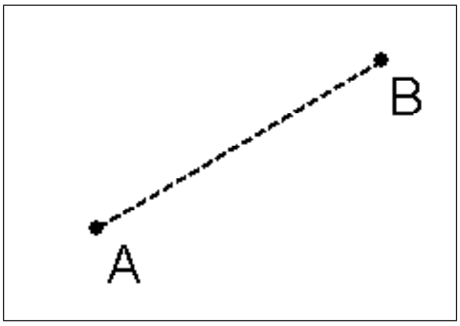
2.1.2 図形の選択

1. 1 つの図形 (曲線・点・軌跡) を選択 ··· 図形上で**マウスの左クリック**
2. 2 つ以上の図形を選択 ··· 2 つめの図形からは、図形上で [Shift] **を押しながらマウスの左クリック**で、追加の選択が出来る

2.1.3 曲線の構築

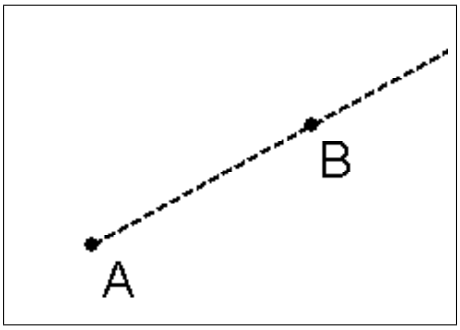
直線 (線分・半直線) や円 (円弧) を描く以外に、前章で挙げた基本作図も一手で描けるようになっているので、便利です。

1. 線分を引く



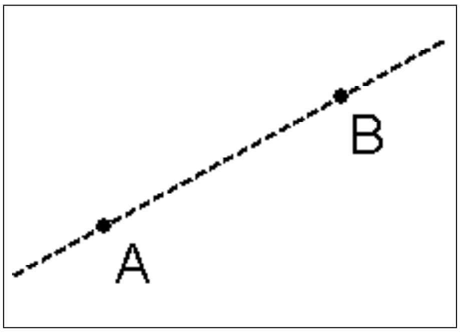
2 点を選択
→ 「線分」を実行する
(見た目に違いはないが、一応内部的には最初に選んだ方の点が起点扱い)

2. 半直線を引く



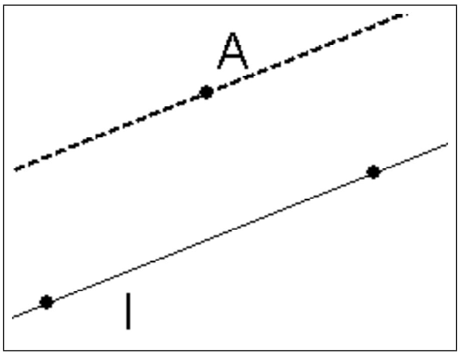
起点を選ぶ
→ 通る点を追加で選ぶ
→ 「半直線」を実行する
(点の指定の順番を替えると、伸びる向きが替わる)

3. 直線を引く



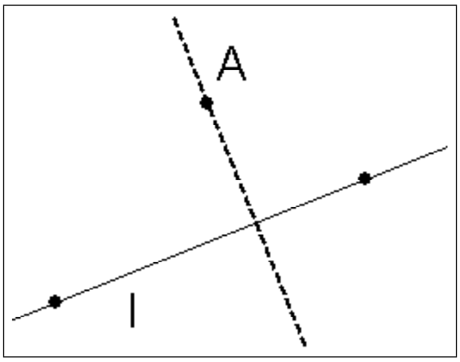
2 点を選ぶ
→ 「直線」を実行する
(見た目に違いはないが、一応内部的には最初に選んだ方の点が起点扱い)

4. 平行線を引く



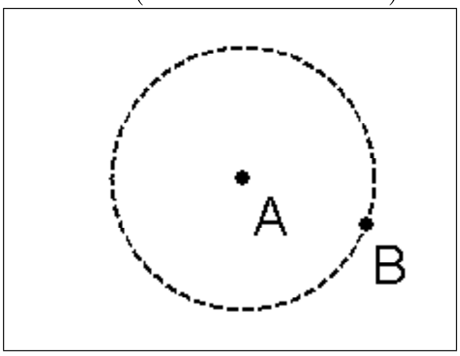
直線 (線分・半直線も可) と 1 点とを選ぶ
→ 「平行線」を実行する

5. 垂線を引く



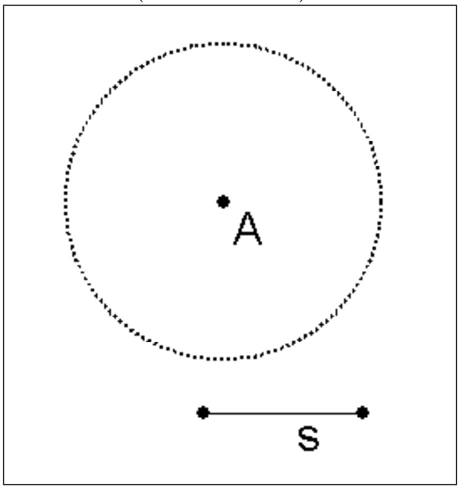
直線 (線分・半直線も可) と 1 点とを選ぶ
→ 「垂線」を実行する
(1 点は直線上でもそうでなくても良い)

6. 円を描く (中心と周上の 1 点)



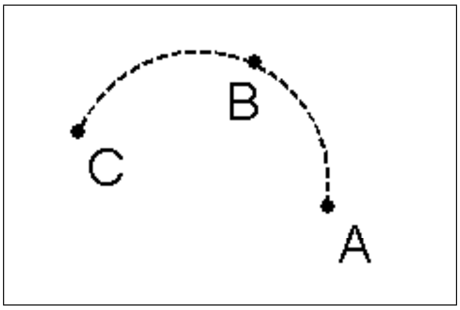
中心を選ぶ
→ 周上の 1 点を追加で選ぶ
→ 「円」を実行する
(点の指定の順番を替えると中心が替わる)

7. 円を描く (中心と半径)



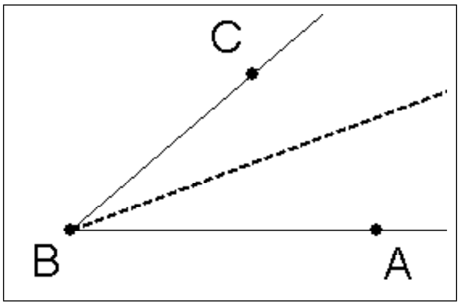
中心と線分とを選ぶ
→ 「円」を実行する

8. 円弧を描く



起点を選択
→ 通過点を追加で選択
→ 終点を追加で選択
→ 「円弧」を実行する

9. 角の二等分線を描く



角を指定する
→ 「角の二等分線」を実行する
ここに、「角の指定」＝ 辺上の 1 点の指定 → 角の頂点の指定 → もう 1 辺上の 1 点の指定 (順番注意)
辺そのもの (直線・半直線・線分) は引いていなくても良い

2.2 KSEG で作図した図形を動かして観察しよう

前章では三角形の外心と外接円とを、定規とコンパスとを用いて作図しました。その作図を KSEG でシミュレートしてみましょう。

実習 2.2.1. 三角形の外心と外接円とを作図してみましょう。

1. 始めに自由点 3 点を (任意に) 取ります。
2. 2 点を選択して線分を描きます。これを 3 回行なって三角形を描きます。(実は 3 点を一度に選択して線分を描くと一度に全ての線分が描けます。)
3. 各辺の垂直二等分線を立てます (3 回)。これは次の操作で行ないます:
   (1) 辺 (線分) を選択して中点を描く　(2) 辺と中点とを選択して垂線を立てる
   ⟶ 1 点で交わることが確認できましたか。
4. 垂直二等分線を 2 本選び、交点を取ります。この点が外心ですね。

5. 始めに外心、次に1頂点を選択して (順番注意)、円を描きます。⟶ 3 頂点を通ることが確認できましたか。この円が外接円ですね。

6. 始めに取った三角形の頂点の1つを摘んで動かしてみましょう。

考察 2.2.2. 外心が三角形の内部／外部／辺上にあるのはそれぞれどんな時でしょうか。

2.3 変換

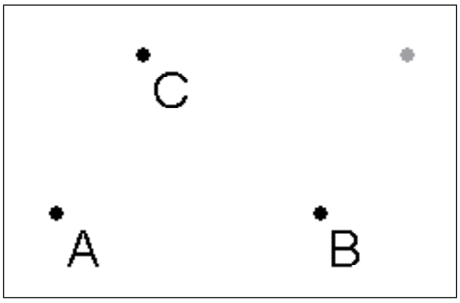
平行移動・鏡映 (線対称移動)・相似変換 (1点中心の拡大・縮小)・回転移動なども定規とコンパスとで作図できますが、KSEG ではもっと手軽に行なえるようになっています。次章の実習でも用いるので、ここで簡単に説明しておきます。これらの変換を行なうには、基準となるベクトル・直線 (半直線・線分)・中心・角度・倍率を、予め指定しておく必要があります (メニューで黄色で表示される項目)。

2.3.1 変換の基準の指定

1. ベクトル ··· 始点を選択 → 終点を追加で選択 → 「ベクトル」を実行
2. 鏡 ··· 直線 (線分・半直線) 選択 → 「鏡」を実行
3. 中心 ··· 1点を選択 → 「点」を実行
4. 角度 ··· 「角を指定」→ 「角度」を実行
5. 倍率 ··· 線分を2本選択 (または数値を選択) → 「倍率」を実行

2.3.2 変換の実行

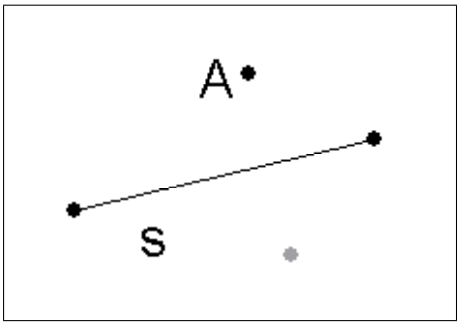
1. 平行移動



始点 A・終点 B を選択
→ ベクトルを指定しておく

移動する図形を選ぶ
→ 「平行移動」を実行する

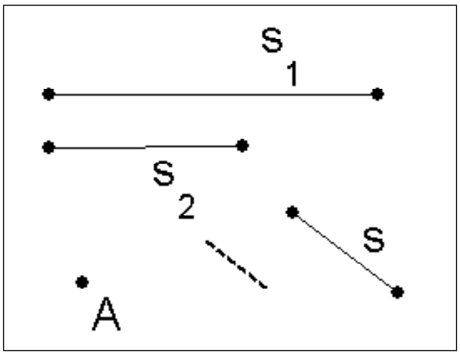
2. 鏡像



線分 s (または直線・半直線) を選択
→ 鏡を指定しておく

移動する図形を選ぶ
→ 「鏡像」を実行する

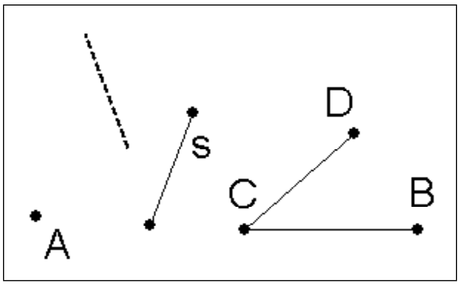
3. 相似変換



中心 A を指定しておく
線分 s_1, s_2 を選択
(または数値を選択)
→ 倍率を指定しておく

移動する図形を選ぶ
→ 「相似変換」を実行する

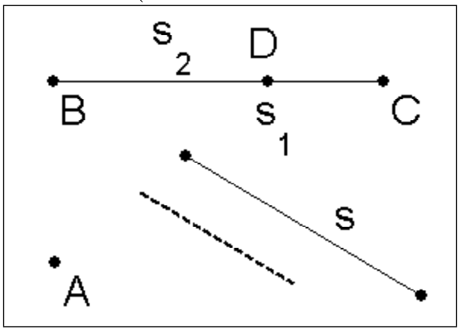
4. 回転移動



中心 A を指定しておく
角 BCD (または数値) を選択
→ 角度を指定しておく

移動する図形を選ぶ
→ 「回転移動」を実行する

5. 相似変換 (良く使う便利な応用編・回転移動でも同様)



中心を指定しておく。
倍率の指定の際に、線分 BC 上に点 D を取り、1 本目に線分 BC を、2 本目に線分 BD を選択
→ 倍率を指定しておく

移動する図形を選ぶ → 「相似変換」を実行

ここで点 D を動かすと、倍率が連動して変化する

3 対話的幾何学ソフトウェア KSEG でもっと遊ぼう

ここまでは定規とコンパスとによる作図のシミュレートの範囲内でしたが、KSEG は他にも「軌跡」「計測」の機能を用いて、定規とコンパスとだけでは描くことのできない図形も、画面上に描いて更にそれを動かして観察することが出来ます。ここからはこの「軌跡」「計測」の機能を使って、もっと遊んでみましょう。

3.1 軌跡を描いてみよう

曲線上に束縛されている点と、それに連動して動く図形とがある時、両者を選択して「軌跡」を実行すると、点に連動して動く図形の軌跡を描くことが出来ます。これは KSEG の大きな機能で、使って楽しい機能です。

点に連動して点が動く場合が通常の軌跡ですが、点に連動する線分・直線・円などの図形の動きを見ることも出来ます。

なお、点の軌跡の場合は、元の点を少しづつ動かしながら、多くの点を求めてそれを繋いで表示しているだけなので、軌跡と他の曲線との交点を求めたりすることは出来ません。

では、「軌跡」の機能で遊びましょう。

実習 3.1.1. 直線とその上にない 1 点を取って、その両者から等距離にある点の軌跡を描いてみましょう。

1. まず 2 点を取って、それを通る直線を引きましょう。
2. 直線上に 1 点を取りましょう (直線上で右クリック)。この点は直線上だけしか動けません (「この点が直線上にある」という関係を保ちながら動く)。
3. 今取った点から直線の垂線を立てましょう。点を動かすとこの垂線も (始めの直線に垂直という関係を保ちながら) 動きます。
4. 始めに取っておいた点と今取った点とを線分で結んで、その垂直二等分線を描きましょう (線分の中点を取り、その点を通って線分に垂直な直線を引く)。
5. さっき作った直線の垂線と今の垂直二等分線との交点を取ります。この点は、一番始めに取った直線と点とから等距離にあります。
6. 直線上にとった動点を動かすと、今取った交点も動きます。この点の軌跡を描いてみましょう。

この軌跡はどういう図形でしょうか。また、始めの点を直線に近付けたり、逆に離したりすると、どんな風に変わるでしょうか。

3.2 ぐるぐる定規 (スピログラフ) を作ってみる

KSEG では更に、2 点間の距離・線分の長さ・円周の長さ・角度・傾き・線分の長さの比などを計って、数値として利用することが出来ます。この数値は計算したり、角度・倍率として指定することが出来ますし、生で数値を入力し、計算に使ったり指定したりすることも出来ます (角度は 360° 法)。これを用いると、定規とコンパスとによる通常の作図では描けない図形も描くことが出来ます。

この「計測」の機能と先程の「軌跡」の機能とを使って、「ぐるぐる定規 (スピログラフ)」の仕掛けを作りましょう。

「ぐるぐる定規」は、外枠の円の内側を小さい円が滑らずに転がる時に、小さい円内の 1 点が描く軌跡として図形を描く道具です。外枠の円と内側の円との半径の比率や、内側の円内での 1 点の位置 (中心からの距離) を変えることで、様々な (しばしば綺麗な) 図を描くことが出来ます。

考察 3.2.1. 外枠の円の中心の周りを内側の円が回る角度 (公転角) と、外枠の円との接点に対して内側の円自身が回る角度 (自転角) との間の関係は、どうなっているでしょうか。

実習 3.2.2. 「ぐるぐる定規 (スピログラフ)」で図形を描いてみましょう。

1. 2 点を結んで線分を引いておきます。なるべく画面の端から端まで長い方が良いでしょう。
2. この線分上に点を取り、片方の端からこの点までの距離を「計測」します。線分上で点を動かすと、距離の数値が目まぐるしく変わりますね。ここまでは道具立ての準備です。

3. 別に 2 点を取り、片方を中心として、もう一方の点を通る円を描きましょう。この円が「ぐるぐる定規」の外枠の円になります。

4. 今描いた円の中心を回転移動の中心に、先程取った距離の値を回転移動の角度に、それぞれ指定します。角度は度数法 (1 周 360°) で扱われます。これが “公転角” になります。

5. 上の指定に従って円周上にある点を回転移動した点を作りましょう。円の中心を回転移動の中心にしましたから、今作った点も外枠の円周上にあるはずです。

6. 線分上に取って置いた点 (制御点) を動かすと計測した距離が変わり、従って回転角も変わって、今作った点も動きます。

7. 今作った円周上の動点と円の中心とを結び (線分にするより中心を始点とする半直線を作った方が面白い)、この線 (動径) 上に新たに点を取り、この点を中心にして円周上の動点を通る円を描きましょう (自動的に外枠の円に接する)。これが内側を転がる円になります。

8. 外枠の円の半径と内側の円の半径とをそれぞれ「計測」しておきます。

9. ウインドウ上部のメニュー内の “Measure” から “Calculate” を選び、先の考察に従って “自転角” を計算しましょう。

10. 内側の円の中心を回転移動の中心に、今作った “自転角” を回転移動の角度に、それぞれ指定します。

11. この指定に従って、外枠の円と内側の円との接点を回転移動した点を作りましょう。

12. 制御点の動きに連れてこの点がどう動くか、追ってみましょう。また、軌跡を描いてみましょう。

13. 内側の円の中心と今の点と結び (線分にするより中心を始点とする半直線を作った方が面白い)、この線 (動径) 上に新たに点を取りましょう。

14. 制御点の動きに連れてこの点がどう動くか、追ってみましょう。また、軌跡を描いてみましょう。

注 3.2.3. KSEG では、制御点を小刻みに動かしながら、それにつれて動く点を沢山求めて繋ぐことで、軌跡を描いています。軌跡がガタガタとしている場合は、この刻みが大きい (“sampling points” が少ない) ので、その数を増やすとより滑らかな図が描けます。軌跡が選択されている状態で、ウインドウ上部のメニュー内の “Edit” から “Change Numbers of Samples” を選び、点の数の値を増やしましょう。(初期値が 150 ですが、多分 1500 くらいで充分です。計算量に影響するので、増やし過ぎると動作が遅くなります。)

考察 3.2.4. 軌跡を表示したままで、内側の円の中心 (外枠の円の動径上にある) を動かして半径を変えてみると、軌跡はどのように変わるでしょうか。また、内側の円の動径上に最後に取った点を動かしてみると、軌跡はどのように変わるでしょうか。

3.3 ぐるぐる定規の軌跡をもっと観察する

「ぐるぐる定規」で描いた図形をもっと観察しましょう。軌跡を決める (変える) 要素は 2 つで、内側の円の半径と外枠の円の半径との比 (外枠の円を固定してあれば単に内側の円の半径) と、内側の円内での動点の位置 (内側の円の中心から動点までの距離と内側の円の半径との比) とです。(本質的には先程作ったものと同じ仕組みですが) もっと観察し易いような作りにしたものを用意しました。

実習 3.3.1. `spirograph.seg` を開いてみましょう。左上の制御点と各動径上の点とを連動させてあるので、左上の直線上で点を動かすと軌跡が変わります。

考察 3.3.2. 内側の円の半径を変えていくと、時々“明らかに顕著な現象” が起こるようです。どんな現象が観察できるでしょうか。また、それはどんな時に発生するでしょうか。

外枠の円の半径 Length R	内側の円の半径 Length r	その比 $\dfrac{\text{Length } r}{\text{Length } R}$
240 (固定)		

3.4 観察から予想・定式化・証明へ

更に観察を続けましょう。今度は内側の円の半径を一旦固定し、内側の円の動径上の点を動かして軌跡の変化を見ます。

実習 3.4.1. 内側の円の半径を固定して動径上の点を動かしてゆくと、内側の円の円周に近い時には反り返った形の軌跡になり、内側の円の中心に近い時には円に近い膨らんだ形の軌跡になります。その間に丁度「辺がほぼ直線状」に見えるときがあるでしょう。この時の内側の円の半径 Length r と動径上の点の中心からの距離 Length s とを表に書き込みましょう。内側の円の半径を違う値にして色々の場合のデータを集めてみましょう。

考察 3.4.2. それは内側の円の半径と動径上の点の中心からの距離とがどのような関係にあるときでしょうか。何か法則の予想が立ちますか。

外枠の円の半径 Length R	内側の円の半径 Length r	その比 $\dfrac{\text{Length } r}{\text{Length } R}$	中心からの距離 Length s	その比 $\dfrac{\text{Length } s}{\text{Length } r}$	
240 (固定)					

色々観察して「**予想**」が立ったでしょうか。増加・減少くらいの定性的性質なら、観察で予想が立つかも知れません。定量的に、内側の円の半径 Length r と動径上の点の中心からの距離 Length s との関係式が予想できて、Length r から Length s が予め算出できるとなれば、数学的にかなりの前進です。別の Length r の値に対して、予想される Length s の値を求めてから、実際にその時にほぼ直線状の形になっているか確かめてみましょう。そうなっていたらこの予想はますます確からしいと言えます。そうでなければ予想を修正する必要があるでしょう。

或る程度確からしそうな予想が立ったら、それを証明しようとします。証明が出来たら、それが「**定理**」となる訳です。基本的には、証明がついて初めて数学的な業績と言えます。この辺りは、厳密な意味での証明が事実上不可能な (自然科学・社会科学の) 他の分野との、最も顕著な違いと言えるでしょう。(勿論、数多くの現象の観察と深い洞察力とにより、その後の研究を導いていくような新たな予想を立てることも、高く評価されますが。)

しかし証明を試みるためにどうしても必要なことが、現段階では実はまだ出来ていません。それは、

「『ほぼ直線状』とはどういうことか」ということが、まだ明確に定められていない

ということです。つまり、証明すべき問題が確定していないのです。それでは証明のしようがありませんね。

従って、我々がまずすべきことは「『ほぼ直線状』とはどういうことか」をきちんと定義することです。それによって初めて、考えるべき問題が確定し、誰もが同じ問題を認識し、それに関する考察や証明が正しいか否か、誰から見ても判定することが可能になるのです。この段階を「**定式化**」と呼びます。

学校で習う数学は既に定式化された内容を扱うのが通常なので、一般にはこの段階は余り意識されていないかと思いますが、この「定式化」という段階は数学では非常に重要な営みです。“正しい” 定式化が出来たら証明はもはや明らか、ということも少なくありません。また、“良い” 定式化が行なえると、より広い適用範囲に更に一般化して考えることができ、新たな現象の発見に繋がっていきます。特に現代数学では、

あるべき「定式化」を得ること

が最も重要と言っても良いかも知れません。

しかし、より広い範囲に適用できる一般的な定式化を行なうためには、どうしても抽象的な記述を積み重ねることになります。その辺が数学の解り難さの一因になっていることも、残念ながら確かでしょう。「数学として証明のし易い定式化」と「人間が直観的に把握し易い表現」というのは中々一致しないようです。数学を専門として学ぶ学生は、その間の行き来を日頃から訓練している訳です。

人間同士の関係での「理解」では、相手の気持ちに寄り添うことが大切ですね。数学の世界に生きている対象たちの「理解」においても同様で、「数学として証明のし易い定式化」というのは、理解してもらいたがっている気持ちに寄り添って合わせてあげることなのかもしれません。

今回の問題に対して、どのような法則が成り立つか、どのように定式化するべきか、答えは一通りとは限りません。現象の観察から発見した予想を定式化し証明を試みる、という正に「観察から数学が始まっていく姿」が味わえた実習となれば幸いです。