

「女子中高生夏の学校 2009」実習J

作図から始まる発見体験

実習日 2009-08-14(追体験版資料)

日本数学会

角皆 宏 (つのがいひろし)

上智大学理工学部・准教授

はじめに

数学に取り組むことは、

数学の世界に住んでいる数や図形などの振舞を
理解しようということです。

それはまず、論理的に考察する前に、

実際に起こる現象に触れて、

それを観察することから始まります。

はじめに

今日は主に図形について、

はじめに

定規とコンパスとによる **作図**

を通じて、

次にコンピュータ上の

幾何学ソフトウェア

を用いて、

いろいろな現象を観察してみましよう。

現象

- 自然現象 → 自然科学
- 社会現象 → 社会科学
- 人文現象 → 人文科学
- 数理現象 → 数理科学 · 数学

現象

- 自然現象 → 自然科学
- 社会現象 → 社会科学
- 人文現象 → 人文科学
- 数理現象 → 数理科学 · 数学

定規とコンパスとによる作図

みなさんの「作図」の経験は？

- したことがない
- 学校の授業で少し
- 学校の授業で結構沢山
- 学校の授業以外で (も) すごく沢山

定規とコンパスとによる作図

- 定規
 - ★ 2 点を結ぶ直線 (充分長い線分) を描く
- コンパス
 - ★ 1 点を中心とし他の 1 点を通る円弧を描く
 - ★ 2 点間の距離 (線分の長さ) を移す
- 点の生成
 - ★ 上記の方法で描かれた直線・円弧の
交点として点が得られる
 - ★ 補助の点を取るのは構わない
(が、一般の位置の点と考える)

基本作図

- 1 点を通り直線に垂線を下ろす (立てる)
- 1 点を通り直線に平行線を引く
- 2 点を結ぶ線分の midpoint ・ 垂直二等分線
- 角の二等分線

作図できますか？

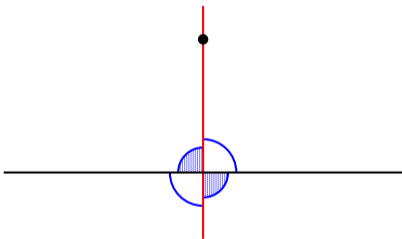
基本作図

- 1 点を通り直線に垂線を下ろす (立てる)
- 1 点を通り直線に平行線を引く
- 2 点を結ぶ線分の midpoint ・ 垂直二等分線
- 角の二等分線

作図できますか？

基本作図

- 1点を通り直線に垂線を下ろす (立てる)

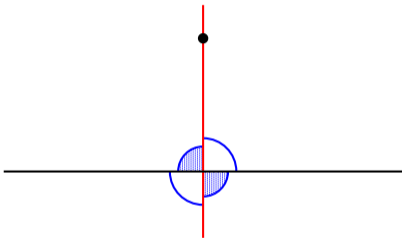


実は2通りの方針に分かれる

- ★ 左右が等しくなるように
- ★ 上下が等しくなるように

基本作図

- 1点を通り直線に垂線を下ろす(立てる)



実は2通りの方針に分かれる

- ★ 左右が等しくなるように
- ★ 上下が等しくなるように

基本作図

- 1点を通り直線に平行線を引く
→ 垂線2回？ もっと簡明な方法あり
- 2点を結ぶ線分の midpoint・垂直二等分線
→ 実は垂直二等分線の方が先に描ける
- 角の二等分線
→ 垂線の2方針のうち片方と同様

三角形の外心・外接円 (実習 1.3.1)

始めに 3 点を (任意に) 取って三角形を作り、

その三角形の外心と外接円とを作図せよ

考察: 外心は三角形の内部 / 边上 / 外部 ?

三角形の外心・外接円 (実習 1.3.1)

始めに 3 点を (任意に) 取って三角形を作り、

その三角形の外心と外接円とを作図せよ

考察: 外心は三角形の内部 / 边上 / 外部 ?

点と直線とから等距離な点 (実習 1.3.2)

始めに直線とその上にない 1 点を取り、

その両者から等距離にある点を作図せよ

(沢山あるので例えば

直線に下ろした垂線の足を決めて)

考察: 幾つも作図して求めてみよ

→ どんな風に並んでいる？

点と直線とから等距離な点 (実習 1.3.2)

始めに直線とその上にない 1 点を取り、

その両者から等距離にある点を作図せよ

(沢山あるので例えば

直線に下ろした垂線の足を決めて)

考察: 幾つも作図して求めてみよ

→ どんな風に並んでいる？

色々な場合の図を沢山描いてみると、
もっと色々なことが判りそう

でも、沢山描くのは大変だ

同じことの沢山の繰り返し
→ コンピュータの得意技 !!

コンピュータ上で作図をシミュレートして、
もっと色々な観察を行なっていこう

特に、コンピュータで動かして体感しよう

色々な場合の図を沢山描いてみると、
もっと色々なことが判りそう

でも、沢山描くのは大変だ

同じことの沢山の繰り返し
→ コンピュータの得意技 !!

コンピュータ上で作図をシミュレートして、
もっと色々な観察を行なっていこう

特に、コンピュータで動かして体感しよう

色々な場合の図を沢山描いてみると、
もっと色々なことが判りそう

でも、沢山描くのは大変だ

同じことの沢山の繰り返し
→ コンピュータの得意技 !!

コンピュータ上で作図をシミュレートして、
もっと色々な観察を行なっていこう

特に、コンピュータで動かして体感しよう

色々な場合の図を沢山描いてみると、
もっと色々なことが判りそう

でも、沢山描くのは大変だ

同じことの沢山の繰り返し
→ コンピュータの得意技 !!

コンピュータ上で作図をシミュレートして、
もっと色々な観察を行なっていこう

特に、コンピュータで動かして体感しよう

色々な場合の図を沢山描いてみると、
もっと色々なことが判りそう

でも、沢山描くのは大変だ

同じことの沢山の繰り返し
→ コンピュータの得意技 !!

コンピュータ上で作図をシミュレートして、
もっと色々な観察を行なっていこう

特に、コンピュータで動かして体感しよう

コンピュータで作図をしよう

準備:

- 予め対話型幾何学ソフトウェア **KSEG** をインストールしておく
- 実習 3.3.1 以降で用いるサンプルプログラム `spirograph.seg` をダウンロードしておく

(実習時は **USB** メモリに準備して、
お土産に持って帰ってもらいました)

対話型幾何学ソフトウェア KSEG

作成: Ilya Baran 氏

- 「定規とコンパスとによる作図」
をシミュレート (模倣)
- 基になる点を動かすと、
そこから作った図形が連動して動く
- 図形が動く軌跡が描ける
- 計測機能により、
定規・コンパスを超える作図も可能

幾何学ソフトウェア KSEG を使う

- フォルダ `kseg-0.401` を選択して開く
- `KSEG.exe` をダブルクリックして実行

→ 白紙の作図画面が開いていれば OK

わからなければ TA のお姉さんに

幾何学ソフトウェア KSEG を使う

基本的な使い方は配布プリントに書いておいた

まずはとにかく動かしてみよう

KSEG の使い方の基本

- 右クリックで点を打つ
- 左クリックで図形を指定
(Shift + 左クリックで追加指定)
- 図形を指定してから、
メニューアイコンで図形を描く
- 左クリック + ひきずりで図形を動かす

KSEG の使い方の基本

練習: 直線 (半直線・線分) を描く

- (1) 2 点を描く (右クリック)
- (2) 2 点を指定 (左クリック)
- (3) メニューで直線 (半直線・線分) を選ぶ

練習: 三角形 を描く

- (1) 3 点を描く
- (2) 2 点ずつ結ぶ

描いてから点をつまんで動かしてみよう!!

わからなければ TA のお姉さんに

KSEG の使い方の基本

「定規とコンパスとによる作図」で良く使う
基本作図は一手で描ける

- 線分 \longrightarrow 中点
- 直線 (半直線・線分) + 1点 \longrightarrow 平行線
- 直線 (半直線・線分) + 1点 \longrightarrow 垂線
- 角 (3点で指定) \longrightarrow 角の二等分線

では、先程の作図を
KSEG でシミュレートしてみよう !!

準備

KSEG メニューで [File] → [New Sketch]
(または [Ctrl]+n)

→ 新しい白紙の作図画面が開けば OK

わからなければ TA のお姉さんに

三角形の外心・外接円 (実習 2.2.1)

- (1) 三角形を描く
- (2) 各辺の垂直二等分線を立てる (3 回)
 - (a) 辺の中点を描く (線分 \rightarrow 中点)
 - (b) 辺と中点とを指定 \rightarrow 垂線

\rightarrow 1 点で交わる!! (外心)

(3) 垂直二等分線を 2 本選ぶ \rightarrow 交点

(4) 外心と 1 頂点とを指定 (順番注意)
 \rightarrow 円を描く

\rightarrow 3 頂点を通る!! (外接円)

三角形の外心・外接円 (実習 2.2.1)

- (1) 三角形を描く
- (2) 各辺の垂直二等分線を立てる (3回)
 - (a) 辺の中点を描く (線分 → 中点)
 - (b) 辺と中点とを指定 → 垂線

→ 1 点で交わる!! (外心)

(3) 垂直二等分線を 2 本選ぶ → 交点

(4) 外心と 1 頂点とを指定 (順番注意)
→ 円を描く

→ 3 頂点を通る!! (外接円)

三角形の外心・外接円 (実習 2.2.1)

- (1) 三角形を描く
- (2) 各辺の垂直二等分線を立てる (3 回)
 - (a) 辺の中点を描く (線分 → 中点)
 - (b) 辺と中点とを指定 → 垂線

→ 1 点で交わる!! (外心)
- (3) 垂直二等分線を 2 本選ぶ → 交点
- (4) 外心と 1 頂点とを指定 (順番注意)

→ 円を描く

→ 3 頂点を通る!! (外接円)

三角形の外心・外接円 (実習 2.2.1)

- (1) 三角形を描く
- (2) 各辺の垂直二等分線を立てる (3 回)
 - (a) 辺の中点を描く (線分 \rightarrow 中点)
 - (b) 辺と中点とを指定 \rightarrow 垂線

\rightarrow 1 点で交わる!! (外心)
- (3) 垂直二等分線を 2 本選ぶ \rightarrow 交点
- (4) 外心と 1 頂点とを指定 (順番注意)

\rightarrow 円を描く

\rightarrow 3 頂点を通る!! (外接円)

三角形の外心・外接円 (実習 2.2.1)

始めの三角形の頂点のどれかを摘んで
動かしてみよう !!

→ 頂点に依存する対象が連動して動く

問: 外心が三角形の辺上にあるのはどんな時 ?

三角形の外心・外接円 (実習 2.2.1)

始めの三角形の頂点のどれかを摘んで
動かしてみよう !!

→ 頂点に依存する対象が連動して動く

問: 外心が三角形の辺上にあるのはどんな時 ?

三角形の外心・外接円 (実習 2.2.1)

始めの三角形の頂点のどれかを摘んで
動かしてみよう !!

→ 頂点に依存する対象が連動して動く

問: 外心が三角形の辺上にあるのはどんな時 ?

点と直線とから等距離な点 (実習 3.1.1)

- (1) 2 点を取る \rightarrow 直線 l
- (2) 別に 1 点 F を取っておく
- (3) 直線 l 上に 1 点 P を取る
(直線 l 上で右クリック)
 \rightarrow 点 P は直線 l 上だけしか動けない
- (4) 点 P + 直線 l \rightarrow 垂線 h
点 P を動かすと垂線 m も
($l \perp m$ という関係を保ちながら) 動く
- (5) 点 F + 点 P \rightarrow 線分・垂直二等分線 m
- (6) 垂線 h + 垂直二等分線 m \rightarrow 交点 Q
 \rightarrow 点 Q は直線 l と点 F とから等距離

点と直線とから等距離な点 (実習 3.1.1)

直線上にとった動点 P を動かすと、
今求めた点 Q も連動して動く

この点 Q の軌跡を描こう

(7) 制御点 P + 連動して動く点 Q \longrightarrow 軌跡

- この軌跡 C はどういう図形？
- 軌跡 C と垂直二等分線 m との関係は？
- 点 F を直線 l に近付けたたり、逆に離れたたりすると、どんな風になる？

点と直線とから等距離な点 (実習 3.1.1)

直線上にとった動点 P を動かすと、
今求めた点 Q も連動して動く

この点 Q の軌跡を描こう

(7) 制御点 P + 連動して動く点 Q \longrightarrow 軌跡

- この軌跡 C はどういう図形？
- 軌跡 C と垂直二等分線 m との関係は？
- 点 F を直線 l に近付けたら、逆に離したりすると、どんな風になる？

点と直線とから等距離な点 (実習 3.1.1)

おまけ:

直線上にとった動点 P を動かすと、
垂直二等分線 m なども連動して動いている

この垂直二等分線 m の“軌跡”も描ける

- 制御点 P + 連動して動く対象 m \longrightarrow 軌跡

余談: m が通過する範囲は？

なんて問題が良くありますね

点と直線とから等距離な点 (実習 3.1.1)

おまけ:

直線上にとった動点 P を動かすと、
垂直二等分線 m なども連動して動いている

この垂直二等分線 m の“軌跡”も描ける

- 制御点 P + 連動して動く対象 m \longrightarrow 軌跡

余談: m が通過する範囲は？

なんて問題が良くありますね

保存・印刷

- 上書き保存: メニューの [File] → [Save]
(または [Ctrl]+s)
- 別名保存: メニューの [File] → [Save As]

- 印刷: メニューの [File] → [Print]
(または [Ctrl]+p)
カラープリンタならカラー印刷も可能

ぐるぐる定規 (スピログラフ)

外枠の円の内側を

小さい円が滑らずに転がる時に

小さい円内の 1 点が描く軌跡

- 内側の円と外枠の円との半径の比率
- 内側の円内での 1 点の位置
(中心からの距離と内側の円の半径との比率)

を色々に変えると、様々な (綺麗な) 図が描ける

KSEG の軌跡・計測の機能を使って描こう

ぐるぐる定規 (スピログラフ)

外枠の円の内側を

小さい円が滑らずに転がる時に

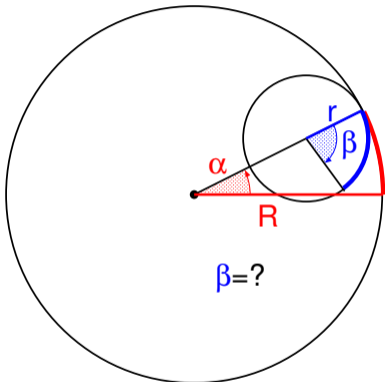
小さい円内の 1 点が描く軌跡

- 内側の円と外枠の円との半径の比率
- 内側の円内での 1 点の位置
(中心からの距離と内側の円の半径との比率)

を色々に変えると、様々な (綺麗な) 図が描ける

KSEG の軌跡・計測の機能を使って描こう

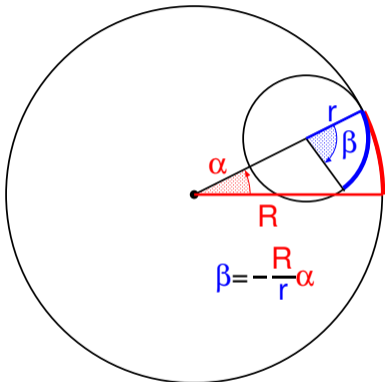
ぐるぐる定規 (スピログラフ)



考察 3.2.1:

“公転角” α と “自転角” β との関係は？

ぐるぐる定規 (スピログラフ)



考察 3.2.1:

“公転角” α と “自転角” β との関係は？

ぐるぐる定規を描いてみる (実習 3.2.2)

(1) 2 点 → 線分

(なるべく端から端まで長い方がよい)

(2) 線分上に点 P を取る (制御点)

→ 片端から点 P までの距離を計測

(ここまでは道具立ての準備)

(3) 別に 2 点を取る → 円 (外枠の円になる)

(4) 円の中心 → 回転移動の中心

さっきの距離の値 → 回転移動の角度

にそれぞれ設定 (“公転角”)

(5) 円周上にある点 → 回転移動した点 Q

(6) 制御点 P を動かすと点 Q も円周上を動く

ぐるぐる定規を描いてみる (実習 3.2.2)

- (7) 中心 C + 円周上の動点 Q \longrightarrow 半直線
半直線 (動径) 上に点 R を取る
点 R 中心で点 Q を通る円 (内側の円)
- (8) 両方の円の半径をそれぞれ計測
- (9) メニュー内の [Measure] \longrightarrow [Calculate]
 \longrightarrow “自転角” を計算
- (10) 内側の円の中心 R \longrightarrow 回転移動の中心
“自転角” \longrightarrow 回転移動の角度
- (11) 接点 Q \longrightarrow 回転移動した点 S
- (12) 制御点 P を動かして点 S の動きを観察
制御点 P + 動点 S \longrightarrow 軌跡

ぐるぐる定規を描いてみる (実習 3.2.2)

- (13) 内側の円の中心 R + 点 S \longrightarrow 半直線
半直線 (動径) 上に新たに点 T を取る
- (14) 制御点 P を動かして点 T の動きを観察
制御点 P + 動点 T \longrightarrow 軌跡

この軌跡が「ぐるぐる定規」の軌跡 !!
(スピログラフ・内トロコイド)

考察 3.2.4: 軌跡を表示したままで、

- 内側の円の中心 R を動かすと ?
- 最後にとった点 T を動かすと ?

ぐるぐる定規を描いてみる (実習 3.2.2)

- (13) 内側の円の中心 R + 点 S \longrightarrow 半直線
半直線 (動径) 上に新たに点 T を取る
- (14) 制御点 P を動かして点 T の動きを観察
制御点 P + 動点 T \longrightarrow 軌跡

この軌跡が「ぐるぐる定規」の軌跡 !!
(スピログラフ・内トロコイド)

考察 3.2.4: 軌跡を表示したままで、

- 内側の円の中心 R を動かすと ?
- 最後にとった点 T を動かすと ?

ぐるぐる定規を描いてみる (実習 3.2.2)

- (13) 内側の円の中心 R + 点 S \longrightarrow 半直線
半直線 (動径) 上に新たに点 T を取る
- (14) 制御点 P を動かして点 T の動きを観察
制御点 P + 動点 T \longrightarrow 軌跡

この軌跡が「ぐるぐる定規」の軌跡 !!
(スピログラフ・内トロコイド)

考察 3.2.4: 軌跡を表示したままで、

- 内側の円の中心 R を動かすと ?
- 最後にとった点 T を動かすと ?

注: 軌跡がガタガタとしている場合

KSEG では、制御点を小刻みに動かしながら、
動点を沢山求めて繋いで軌跡を描いている

この刻みを細かくする

(“sampling points”を増やす)と、
より滑らかな図が描ける

軌跡が選択されている状態で、

- メニューの [Edit]
 - [Change Numbers of Samples]
 - 点の数の値を増やす
(多分 1500 くらいで充分)

ぐるぐる定規でもっと遊ぶ (実習 3.3.1)

もっと動かして遊び易いものを用意しました

- **KSEG** のメニューの
[File] → [Open] (または [Ctrl]+o)
- 予めダウンロードしておいたフォルダから
`spirograph.seg` を選択
- 必要ならウィンドウの右下を掴んで、
全体が収まるように広げる
- 上の線分上の桃色の点が制御点
→ 動かすとぐるぐる動く

ぐるぐる定規でもっと遊ぶ (実習 3.3.1)

- 制御点 + 内側の円内の動点 → 軌跡

外枠の円の半径 R は固定済み

下方の線分 2 本のうち

- 上の線分上の緑色の点を動かす
→ 内側の円の半径 r が変わる
- 下の線分上の赤色の点を動かす
→ 内側の円内での動点の位置 s が変わる

まず内側の円の半径を変えてみよう

ぐるぐる定規でもっと遊ぶ (実習 3.3.1)

- 制御点 + 内側の円内の動点 → 軌跡

外枠の円の半径 R は固定済み

下方の線分 2 本のうち

- 上の線分上の緑色の点を動かす
→ 内側の円の半径 r が変わる
- 下の線分上の赤色の点を動かす
→ 内側の円内での動点の位置 s が変わる

まず内側の円の半径を変えてみよう

ぐるぐる定規でもっと遊ぶ (実習 3.3.1)

- 制御点 + 内側の円内の動点 → 軌跡

外枠の円の半径 R は固定済み

下方の線分 2 本のうち

- 上の線分上の緑色の点を動かす
→ 内側の円の半径 r が変わる
- 下の線分上の赤色の点を動かす
→ 内側の円内での動点の位置 s が変わる

まず内側の円の半径を変えてみよう

ぐるぐる定規でもっと遊ぶ (考察 3.3.2)

内側の円の半径を変えていくと、
時々“明らかに顕著な現象”が起こるようだ

どんな現象が観察できるか？

また、それはどんな時に発生するか？

内側の円の半径 r ・ 半径比 r/R
→ 表に記入して考察せよ

ぐるぐる定規でもっともっと遊ぶ (実習 3.4.1)

今度は内側の円の半径を一旦固定し、
内側の円内の動点を動かして
軌跡の変化を見よう

内側の円の動点が

- 内側の円の円周に近い
→ 反り返った形の軌跡
- 内側の円の中心に近い
→ 円に近い膨らんだ形の軌跡

その間に

丁度「辺がほぼ直線状」に見えるときがある

ぐるぐる定規でもっともっと遊ぶ (実習 3.4.1)

今度は内側の円の半径を一旦固定し、
内側の円内の動点を動かして
軌跡の変化を見よう

内側の円の動点が

- 内側の円の円周に近い
→ 反り返った形の軌跡
- 内側の円の中心に近い
→ 円に近い膨らんだ形の軌跡

その間に

丁度「辺がほぼ直線状」に見えるときがある

ぐるぐる定規でもっともっと遊ぶ (実習 3.4.1)

今度は内側の円の半径を一旦固定し、
内側の円内の動点を動かして
軌跡の変化を見よう

内側の円の動点が

- 内側の円の円周に近い
→ 反り返った形の軌跡
- 内側の円の中心に近い
→ 円に近い膨らんだ形の軌跡

その間に

丁度「辺がほぼ直線状」に見えるときがある

ぐるぐる定規でもっともっと遊ぶ (実習 3.4.1)

丁度「辺がほぼ直線状」に見える時の

内側の円の半径 r ・ 動点の中心からの距離 s
→ 表に記入して考察せよ

内側の円の半径を変えて
色々な場合のデータを集めよ

何か法則の予想が立つだろうか？

ぐるぐる定規でもっともっと遊ぶ (実習 3.4.1)

丁度「辺がほぼ直線状」に見える時の
内側の円の半径 r ・ 動点の中心からの距離 s
の間の関係は？

何か法則の予想が立つだろうか？

予想が立ったら、

- 別の r の値に対して、
予想に基づいて s の値を求めてから、
実際にそうなっているか確かめてみよ
- 確からしいなら証明できるか？

ぐるぐる定規でもっともっと遊ぶ (実習 3.4.1)

丁度「辺がほぼ直線状」に見える時の
内側の円の半径 r ・ 動点の中心からの距離 s
の間の関係は？

何か法則の予想が立つだろうか？

予想が立ったら、

- 別の r の値に対して、
予想に基づいて s の値を求めてから、
実際にそうなっているか確かめてみよ
- 確からしいなら証明できるか？

証明が出来れば**定理**になる

(証明がついて初めて数学的な業績)

証明を試みるためにどうしても必要なことが
現段階では実はまだ出来ていない

「『ほぼ直線状』とはどういうことか」
ということが、まだ明確に定められていない
(証明すべき問題が確定していない)

これでは証明のしようがない

証明が出来れば**定理**になる

(証明がついて初めて数学的な業績)

証明を試みるためにどうしても必要なことが
現段階では実はまだ出来ていない

「『ほぼ直線状』とはどういうことか」
ということが、まだ明確に定められていない
(証明すべき問題が確定していない)

これでは証明のしようがない

証明が出来れば定理になる

(証明がついて初めて数学的な業績)

証明を試みるためにどうしても必要なことが
現段階では実はまだ出来ていない

「『ほぼ直線状』とはどういうことか」
ということが、まだ明確に定められていない
(証明すべき問題が確定していない)

これでは証明のしようがない

我々がまずすべきことは

「『ほぼ直線状』とはどういうことか」

をきちんと定義すること (定式化)

特に現代数学では、

あるべき「定式化」を得ること

が最も重要と言っても良いかも

人間が直観的に把握し易い表現とは限らない

数学の世界に生きている対象たちの

理解してもらいたがっている気持ちに

合わせてあげることなのかも

我々がまずすべきことは

「『ほぼ直線状』とはどういうことか」

をきちんと定義すること (定式化)

特に現代数学では、

あるべき「定式化」を得ること

が最も重要と言っても良いかも

人間が直観的に把握し易い表現とは限らない

数学の世界に生きている対象たちの

理解してもらいたがっている気持ちに

合わせてあげることなのかも

我々がまずすべきことは

「『ほぼ直線状』とはどういうことか」

をきちんと定義すること (定式化)

特に現代数学では、

あるべき「定式化」を得ること

が最も重要と言っても良いかも

人間が直観的に把握し易い表現とは限らない

数学の世界に生きている対象たちの

理解してもらいたがっている気持ちに

合わせてあげることなのかも

我々がまずすべきことは

「『ほぼ直線状』とはどういうことか」

をきちんと定義すること (定式化)

特に現代数学では、

あるべき「定式化」を得ること

が最も重要と言っても良いかも

人間が直観的に把握し易い表現とは限らない

数学の世界に生きている対象たちの

理解してもらいたがっている気持ちに

合わせてあげることなのかも