「女子中高生夏の学校 2009」実習 J

作図から始まる発見体験

実習日 2009-08-14(追体験版資料)
日本数学会
角皆 宏 (つのがい ひろし)
上智大学理工学部・准教授

はじめに

数学に取り組むことは、

数学の世界に住んでいる数や図形などの振舞を

理解しようということです。

それはまず、論理的に考察する前に、

実際に起こる現象に触れて、

それを観察することから始まります。

はじめに

今日は主に図形について、

はじめに

定規とコンパスとによる 作図

を通じて、

次にコンピュータ上の

幾何学ソフトウェア

を用いて、

いろいろな現象を観察してみましょう。

現象

- 自然現象 $\longrightarrow$ 自然科学
- 社会現象 $\longrightarrow$ 社会科学
- 人文現象 $\longrightarrow$ 人文科学
- 数理現象 $\longrightarrow$ 数理科学・数学

定規とコンパスとによる作図

みなさんの「作図」の経験は？

- **したことがない**
- **学校の授業で少し**
- **学校の授業で結構沢山**
- **学校の授業以外で (も) すごく沢山**

定規とコンパスとによる作図

- **定規**
  - ⋆ 2 **点を結ぶ直線 (充分長い線分) を描く**
- **コンパス**
  - ⋆ 1 **点を中心とし他の** 1 **点を通る円弧を描く**
  - ⋆ 2 **点間の距離 (線分の長さ) を移す**
- **点の生成**
  - ⋆ **上記の方法で描かれた直線・円弧の交点として点が得られる**
  - ⋆ **補助の点を取るのは構わない (が、一般の位置の点と考える)**

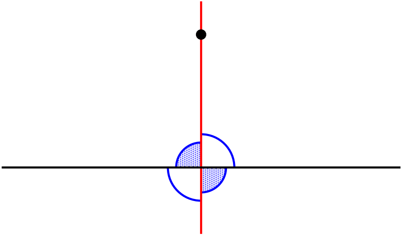
基本作図

- 1 点を通り直線に垂線を下ろす (立てる)
- 1 点を通り直線に平行線を引く
- 2 点を結ぶ線分の中点・垂直二等分線
- 角の二等分線

作図できますか ?

基本作図

- 1 点を通り直線に垂線を下ろす (立てる)



実は 2 通りの方針に分かれる

⋆ 左右が等しくなるように

⋆ 上下が等しくなるように

基本作図

- 1 点を通り直線に平行線を引く
  $\longrightarrow$ 垂線 2 回？ もっと簡明な方法あり

- 2 点を結ぶ線分の中点・垂直二等分線
  $\longrightarrow$ 実は垂直二等分線の方が先に描ける

- 角の二等分線
  $\longrightarrow$ 垂線の 2 方針のうち片方と同様

三角形の外心・外接円 (実習 1.3.1)

始めに 3 点を (任意に) 取って三角形を作り、

その三角形の外心と外接円とを作図せよ

考察: 外心は三角形の内部／辺上／外部 ?

点と直線とから等距離な点 (実習 1.3.2)

始めに直線とその上にない 1 点を取り、

その両者から等距離にある点を作図せよ

(沢山あるので例えば
直線に下ろした垂線の足を決めて)

考察: 幾つも作図して求めてみよ
$\longrightarrow$ どんな風に並んでいる ?

色々な場合の図を沢山描いてみると、
もっと色々なことが判りそう

でも、沢山描くのは大変だ

同じことの沢山の繰り返し
$\longrightarrow$ コンピュータの得意技 !!

コンピュータ上で作図をシミュレートして、
もっと色々な観察を行なっていこう

特に、コンピュータで動かして体感しよう

コンピュータで作図をしよう

準備:

- 予め対話型幾何学ソフトウェア KSEG を
インストールしておく

- 実習 3.3.1 以降で用いるサンプルプログラム
`spirograph.seg` をダウンロードしておく

(実習時は USB メモリに準備して、
お土産に持って帰ってもらいました)

対話型幾何学ソフトウェア KSEG

作成: Ilya Baran 氏

- 「定規とコンパスとによる作図」をシミュレート (模倣)
- 基になる点を動かすと、そこから作った図形が連動して動く
- 図形が動く軌跡が描ける
- 計測機能により、定規・コンパスを超える作図も可能

幾何学ソフトウェア KSEG を使う

- フォルダ `kseg-0.401` を選択して開く
- `KSEG.exe` をダブルクリックして実行

$\longrightarrow$ 白紙の作図画面が開いていれば OK

わからなければ TA のお姉さんに

幾何学ソフトウェア KSEG を使う

基本的な使い方は配布プリントに書いておいた

まずはとにかく動かしてみよう

KSEG の使い方の基本

- 右クリックで点を打つ
- 左クリックで図形を指定
  (Shift ＋左クリックで追加指定)
- 図形を指定してから、
  メニューアイコンで図形を描く
- 左クリック＋ひきずりで図形を動かす

KSEG の使い方の基本

練習: 直線 (半直線・線分) を描く

(1) 2 点を描く (右クリック)
(2) 2 点を指定 (左クリック)
(3) メニューで直線 (半直線・線分) を選ぶ

練習: 三角形 を描く

(1) 3 点を描く
(2) 2 点づつ結ぶ

描いてから点をつまんで動かしてみよう!!

わからなければ TA のお姉さんに

KSEG の使い方の基本

「定規とコンパスとによる作図」で良く使う
基本作図は一手で描ける

- **線分** $\longrightarrow$ **中点**
- **直線 (半直線・線分) ＋ 1 点** $\longrightarrow$ **平行線**
- **直線 (半直線・線分) ＋ 1 点** $\longrightarrow$ **垂線**
- **角 (3 点で指定)** $\longrightarrow$ **角の二等分線**

では、先程の作図を
KSEG でシミュレートしてみよう !!

準備

KSEG メニューで [File] $\longrightarrow$ [New Sketch]
(または [Ctrl]+n**)**

$\longrightarrow$ **新しい白紙の作図画面が開けば OK**

わからなければ TA のお姉さんに

三角形の外心・外接円 (実習 2.2.1)

(1) 三角形を描く

(2) 各辺の垂直二等分線を立てる (3 回)

  (a) 辺の中点を描く (線分 $\longrightarrow$ 中点)

  (b) 辺と中点とを指定 $\longrightarrow$ 垂線

$\longrightarrow$ 1 点で交わる!! (外心)

(3) 垂直二等分線を 2 本選ぶ $\longrightarrow$ 交点

(4) 外心と 1 頂点とを指定 (順番注意)

$\longrightarrow$ 円を描く

$\longrightarrow$ 3 頂点を通る!! (外接円)

三角形の外心・外接円 (実習 2.2.1)

始めの三角形の頂点のどれかを摘んで
動かしてみよう !!

$\longrightarrow$ 頂点に依存する対象が連動して動く

問: 外心が三角形の辺上にあるのはどんな時 ?

点と直線とから等距離な点 (実習 3.1.1)

(1) 2 点を取る $\longrightarrow$ 直線 ℓ

(2) 別に 1 点 F を取っておく

(3) 直線 ℓ 上に 1 点 P を取る

(直線 ℓ 上で右クリック)

$\longrightarrow$ 点 P は直線 ℓ 上だけしか動けない

(4) 点 P ＋ 直線 ℓ $\longrightarrow$ 垂線 h

点 P を動かすと垂線 m も

($\ell \perp$ m という関係を保ちながら) 動く

(5) 点 F ＋ 点 P $\longrightarrow$ 線分・垂直二等分線 m

(6) 垂線 h ＋ 垂直二等分線 m $\longrightarrow$ 交点 Q

$\longrightarrow$ 点 Q は直線 ℓ と点 F とから等距離

点と直線とから等距離な点 (実習 3.1.1)

直線上にとった動点 P を動かすと、
今求めた点 Q も連動して動く

この点 Q の軌跡を描こう

(7) 制御点 P ＋ 連動して動く点 Q $\longrightarrow$ 軌跡

- この軌跡 C はどういう図形？
- 軌跡 C と垂直二等分線 m との関係は？
- 点 F を直線 ℓ に近付けたり、逆に離したりすると、どんな風に変わる？

点と直線とから等距離な点 (実習 3.1.1)

おまけ:

直線上にとった動点 P を動かすと、
垂直二等分線 m なども連動して動いている

この垂直二等分線 m の "軌跡" も描ける

- **制御点 P ＋ 連動して動く対象 m $\longrightarrow$ 軌跡**

余談: m が通過する範囲は？
なんて問題が良くありますね

保存・印刷

- **上書き保存: メニューの** [File] ⟶ [Save] **(または** [Ctrl]+s**)**
- **別名保存: メニューの** [File] ⟶ [Save As]

- **印刷: メニューの** [File] ⟶ [Print] **(または** [Ctrl]+p**)**
  カラープリンタならカラー印刷も可能

ぐるぐる定規 (スピログラフ)

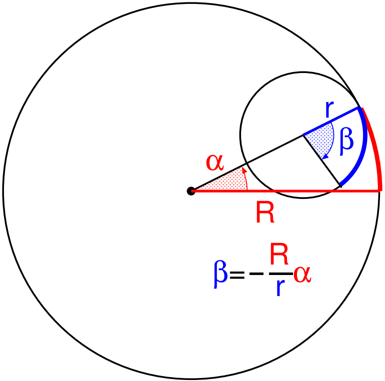
外枠の円の内側を
小さい円が滑らずに転がる時に
小さい円内の 1 点が描く軌跡

- 内側の円と外枠の円との半径の比率
- 内側の円内での 1 点の位置
  (中心からの距離と内側の円の半径との比率)

を色々と変えると、様々な (綺麗な) 図が描ける

KSEG の軌跡・計測の機能を使って描こう

ぐるぐる定規 (スピログラフ)



考察 3.2.1:
“公転角” α と “自転角” β との間の関係は？

ぐるぐる定規を描いてみる (実習 3.2.2)

(1) 2 点 $\longrightarrow$ **線分**

(なるべく端から端まで長い方が良い)

(2) 線分上に点 P を取る (制御点)

$\longrightarrow$ 片端から点 P までの距離を**計測**

(ここまでは道具立ての準備)

(3) 別に 2 点を取る $\longrightarrow$ 円 (外枠の円になる)

(4) 円の中心 $\longrightarrow$ **回転移動の中心**

さっきの距離の値 $\longrightarrow$ **回転移動の角度**

にそれぞれ設定 (“公転角”)

(5) 円周上にある点 $\longrightarrow$ **回転移動**した点 Q

(6) 制御点 P を動かすと点 Q も円周上を動く

ぐるぐる定規を描いてみる (実習 3.2.2)

(7) 中心 C ＋ 円周上の動点 Q ⟶ 半直線
半直線 (動径) 上に点 R を取る
点 R 中心で点 Q を通る円 (内側の円)
(8) 両方の円の半径をそれぞれ計測
(9) メニュー内の [Measure] ⟶ [Calculate]
⟶ "自転角" を計算
(10) 内側の円の中心 R ⟶ 回転移動の中心
"自転角" ⟶ 回転移動の角度
(11) 接点 Q ⟶ 回転移動した点 S
(12) 制御点 P を動かして点 S の動きを観察
制御点 P ＋動点 S ⟶ 軌跡

ぐるぐる定規を描いてみる (実習 3.2.2)

(13) 内側の円の中心 R ＋ 点 S ⟶ 半直線
半直線 (動径) 上に新たに点 T を取る

(14) 制御点 P を動かして点 T の動きを観察
制御点 P ＋動点 T ⟶ 軌跡

この軌跡が「ぐるぐる定規」の軌跡 !!
(スピログラフ・内トロコイド)

考察 3.2.4: 軌跡を表示したままで、

- 内側の円の中心 R を動かすと ?
- 最後に取った点 T を動かすと ?

注: 軌跡がガタガタとしている場合

KSEG では、制御点を小刻みに動かしながら、動点を沢山求めて繋いで軌跡を描いている

この刻みを細かくする (“sampling points” を増やす) と、より滑らかな図が描ける

軌跡が選択されている状態で、

- **メニューの** `[Edit]`
  $\longrightarrow$ `[Change Numbers of Samples]`
  $\longrightarrow$ **点の数の値を増やす**
  (多分 1500 **くらいで充分)**

ぐるぐる定規でもっと遊ぶ (実習 3.3.1)

もっと動かして遊び易いものを用意しました

- KSEG のメニューの
  `[File]` $\longrightarrow$ `[Open]` (または `[Ctrl]+o`)
- 予めダウンロードしておいたフォルダから
  `spirograph.seg` を選択
- 必要ならウィンドウの右下を摘んで、
  全体が収まるように拡げる
- 上の線分上の桃色の点が制御点
  $\longrightarrow$ 動かすとぐるぐる動く

ぐるぐる定規でもっと遊ぶ (実習 3.3.1)

- 制御点 ＋ 内側の円内の動点 $\longrightarrow$ 軌跡

外枠の円の半径 R は固定済み

下方の線分 2 本のうち

- 上の線分上の緑色の点を動かす
  $\longrightarrow$ 内側の円の半径 r が変わる
- 下の線分上の赤色の点を動かす
  $\longrightarrow$ 内側の円内での動点の位置 s が変わる

まず内側の円の半径を変えてみよう

ぐるぐる定規でもっと遊ぶ (考察 3.3.2)

内側の円の半径を変えていくと、
時々 "明らかに顕著な現象" が起こるようだ

どんな現象が観察できるか ?

また、それはどんな時に発生するか ?

内側の円の半径 r ・ **半径比** r/R
$\longrightarrow$ **表に記入して考察せよ**

ぐるぐる定規でもっともっと遊ぶ (実習 3.4.1)

今度は内側の円の半径を一旦固定し、
内側の円内の動点を動かして
軌跡の変化を見よう

内側の円の動点が

- 内側の円の円周に近い
  $\longrightarrow$ 反り返った形の軌跡
- 内側の円の中心に近い
  $\longrightarrow$ 円に近い膨らんだ形の軌跡

その間に
丁度「辺がほぼ直線状」に見えるときがある

ぐるぐる定規でもっともっと遊ぶ (実習 3.4.1)

丁度「辺がほぼ直線状」に見える時の

内側の円の半径 r ・動点の中心からの距離 s

$\longrightarrow$ 表に記入して考察せよ

内側の円の半径を変えて

色々の場合のデータを集めよ

何か法則の予想が立つだろうか？

ぐるぐる定規でもっともっと遊ぶ (実習 3.4.1)

丁度「辺がほぼ直線状」に見える時の
内側の円の半径 r・動点の中心からの距離 s
の間の関係は？

何か法則の予想が立つだろうか？

予想が立ったら、

- 別の r の値に対して、
  予想に基づいて s の値を求めてから、
  実際にそうなっているか確かめてみよ
- 確からしいなら証明できるか？

証明が出来れば定理になる
(証明がついて初めて数学的な業績)

証明を試みるためにどうしても必要なことが
現段階では実はまだ出来ていない

「『ほぼ直線状』とはどういうことか」
ということが、まだ明確に定められていない
(証明すべき問題が確定していない)

これでは証明のしようがない

我々がまずすべきことは
「『ほぼ直線状』とはどういうことか」
をきちんと定義すること (定式化)

特に現代数学では、
あるべき「定式化」を得ること
が最も重要と言っても良いかも

人間が直観的に把握し易い表現とは限らない

数学の世界に生きている対象たちの
理解してもらいたがっている気持ちに
合わせてあげることなのかも